

# INTRODUCCION A LA TEORIA DEL CONTROL NUMERICO DE PROCESOS

(Análisis y síntesis de sistemas lineales  
deterministas por medio de la transfor-  
mada en  $z$ ).

F. Sáez Vacas.

1.968.

Estos apuntes siguen en sus líneas generales y en la esencia del contenido el curso explicado en la E.T.S.I.T. por el profesor Jacques Delmas, de la Escuela Superior de Aeronáutica de París, en Marzo de 1.968. Corresponden pues a unas 15 horas de clase magistral, complementadas por otras tantas de problemas de aplicación

Hemos utilizado además las siguientes referencias:

- 1.- Boudarel, Delmas, Guichet.- "Commande numerique des processus. Premiere partie" Ecole Nationale Supérieure de l'Aeronautique 1.967.
- 2.- Ragazzini, Franklin.- "Sampled data control systems" McGraw-Hill 1.958.
- 3.- Sévely.- "Systèmes de commande à données échantillonnées" Université de Toulouse 1.966.
- 4.- Elgerd.- "Control Systems theory" MacGraw-Hill 1.967.
- 5.- Gille, Decaulne, Pélégryn.- "Méthodes modernes d'étude des systèmes asservis" Dunod 1.960.

El alumno Gregorio Fernández ha redactado el anexo del lugar de raíces.

-----

# = I N D I C E =

## INTRODUCCION

Pags.

I. -

### ANALISIS DE SEÑALES MUESTREADAS

1.-	Modelos matemáticos de la señal muestreada.	1
2.-	Conversión de una señal muestreada en señal continua (extrapoladores)	4
3.-	Definición de la transformada en Z	8
4.-	Relación entre $F(z)$ y $f(nT)$	10
4.1.-	Transformación directa: $f(nT)$ $F(z)$	"
4.2.-	Transformación inversa: $F(z)$ $f(nT)$ o $f(nT)$ .	11
4.2.1.-	Desarrollo en serie de potencias enteras de $z^{-1}$ .	"
4.2.2.-	Obtención del término general $f(nT)$ .	12
4.3.-	Tablas	13
5.-	Algunas propiedades útiles de la transformación en z.	"
5.1.-	Linealidad	"
5.2.-	Teorema del retardo	14
5.2.1.-	Teorema generalizado del retardo	15
5.2.2.-	Teorema del adelanto.	16
5.3.-	Valor inicial $f_0$ de la secuencia temporal.	"
5.4.-	Valor final $f$ de la secuencia temporal.	"
6.-	Formas propias de una señal.	18
7.-	Relación entre $F(z)$ y $F(p)$ .	20
8.-	Límite inferior de la cadencia de muestreo.	23
9.-	Cuadro resumen.	25

II. -

### TRANSMISION DE LA SEÑAL EN SISTEMAS MUESTREADOS:

10.-	Transmitancia en z (o función de transferencia)	26
11.-	Ampliación de la idea de transmitancia en z.	29
12.-	Modelo matemático en z del comportamiento discreto en los sistemas híbridos.	33

	13.- Ecuaciones recurrentes en un sistema numérico.	<u>Pags.</u> 35
	13.1.-Ecuaciones en diferencias.	37
III.-	ANALISIS DE LOS SISTEMAS MUESTREADOS LINEA - LES.	
	14.- Estabilidad.	39
	14.1.- Definición y condiciones de estabilidad.	"
	14.2.- Algunos criterios de estabilidad.	43
	14.2.1.- Criterios algebraicos.	"
	14.2.2.- Criterios geométricos.	49
	15.- Régimen permanente; error en la respuesta a en- tradas-Fijo.	50
	16.- Régimen transitorio.	52
IV.-	SINTESIS DE SISTEMAS NUMERICOS DE CONTROL. -	
	17.- Problema general de la síntesis.	54
	18.- Reglas importantes en la síntesis en z.	55
	19.- Sistemas de control que minimizan el tiempo de- respuesta del proceso.	58
	20.- Síntesis por el método de los polos dominantes.	61
ANEXO.-	1. IDEAS ELEMENTALES SOBRE LA ORGANIZA- CION DE LOS CALCULADORES NUMERICOS.	
	1.- Esquema funcional.	66
	2.- Calculadores en tiempo real.	68
ANEXO.-	2. EL LUGAR DE LAS RAICES (LUGAR DE EVANS)	
	1.- Estudio de los sistemas a partir de sus polos y - ceros.	69
	2.- El lugar de Evans.	71
	3.- Ejemplo.	73
	4.- Condición de módulo y condición de fase.	76
	5.- Reglas geométricas de trazado aproximado del lu- gar de Evans.	78
	6.- Ejemplos de trazado del lugar de Evans.	87

	<u>Pags.</u>
6.1.- Servosistema de segundo orden con bucle - no unitario.	87
6.2.- Servosistema de tercer orden, con una inte- gración, polos complejos y bucle unitario.	91
6.3.- Servosistema pulsado en segundo orden.	93
7.- Aplicaciones a la estabilidad y a la compensación.	96
7.1.- Estabilidad	"
7.2.- Compensación por control derivado o avance de fase.	98
7.3.- Compensación por control integral.	99
8.- Observaciones finales.	103
8.1.- $k < 0$	"
8.2.- Lugar de raíces respecto de otros parámetros.	"
ANEXO.- 3. TABLA DE TRANSFORMADAS EN (Z, m.)	- 105
ANEXO.-4. TABLA DE TRANSFORMADAS EN Z Y EN (Z, m).	-

-----

## INTRODUCCION.

La teoría de los servosistemas lineales continuos (analógicos) explica cómo a partir de la diferencia entre la respuesta del proceso (salida  $s(t)$ ) y el estímulo (entrada  $e(t)$ ) el sistema de control elabora una señal  $u(t)$ , que modifica el comportamiento del proceso en el sentido de optimizar un criterio.

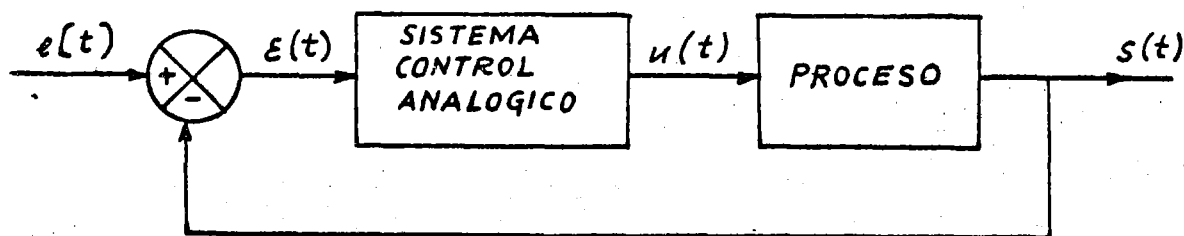


Fig. 1.

La teoría clásica de los servos lineales que tratan señales continuas se basa en la transformada de Laplace, es decir, en la correspondencia existente entre los polos de la transmitancia situados en el plano de la variable compleja  $p$  y la solución de la ecuación diferencial lineal que representa al sistema en bucle cerrado.

La síntesis del sistema de control se lleva a cabo; 1º) fijando a priori una estructura (p.ej. una célula de avance de fase + amplificador); 2º) variando los parámetros de la célula y la ganancia hasta obtener por tanteo una optimización de un criterio que consiste esencialmente en la estabilidad más un compromiso entre precisión en régimen permanente y rapidez en régimen transitorio sin sobretensiones peligrosas. Es costumbre visualizar este criterio por un contorno a 2,3 db en el plano de Black o un juego de márgenes de ganancia y fase en el de Nyquist.

Estos apuntes tratan de los sistemas de control con información en instantes discretos, cuyo organigrama más simple y general es el de la figura 2.

El sistema de control elabora una sucesión de valores  $u_n$  que, después de ser convertida en la señal continua  $u(t)$ , actúa sobre el proceso en la forma indicada más arriba. Para estudiar este aspecto híbrido de la cuestión es necesaria una teoría matemática, semejante en gran parte a la anterior,

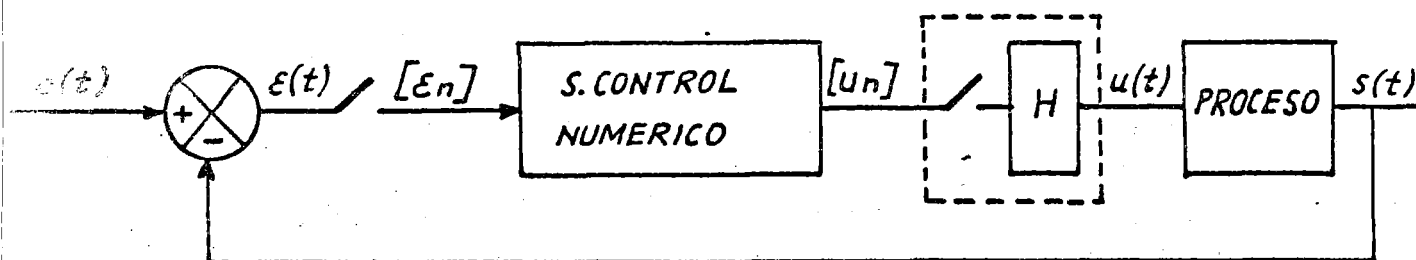


Fig. 2.

si bien ahora la correspondencia se establecerá, por lo que respecta a la relación entre señales discretas, entre los polos situados en el plano de la variable compleja  $z$  y la solución de una ecuación lineal recurrente o en diferencias.

La teoría que aquí presentamos es la teoría transformacional en la variable compleja  $z = e^{Tp}$ , siendo  $p$  la variable de Laplace. Nos limitaremos al caso de sistemas:

- lineales
- deterministas
- a modulación de amplitud o puramente numéricos.
- con tratamiento de la información a una sola cadencia constante.

-----

## 1.- ANÁLISIS DE SEÑALES MUESTREADAS.

### 1.- Modelos matemáticos de la señal muestreada.

Sea una señal  $f(t)$  cualquiera representada en la fig. 3. Consideremos únicamente los valores de esta señal en instantes  $0, T, 2T, \dots$ . La operación física que consiste en tomar estas muestras se simboliza en general por  $\frac{f(t)}{T}$  donde  $T$  significa el tiempo que el interruptor permanece abierto o lo que es igual el periodo de clausura del mismo. En adelante se supone:

- a).-  $T$  constante.
- b).- Todos los interruptores (muestreadores) de cualquier sistema considerado son perfectamente síncronos.
- c).- La operación de muestreo es instantánea y exacta (es decir, no hay retardos ni errores de cuantificación u otros).

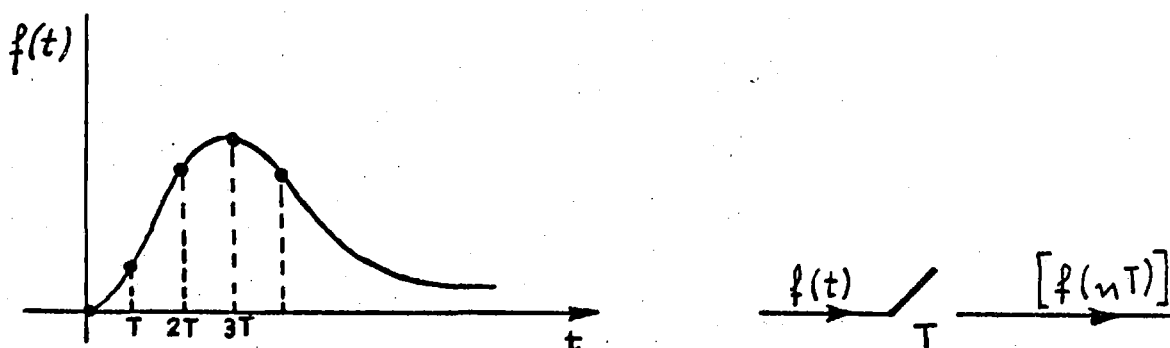


Fig. 3.

Independientemente de la técnica de obtención de las muestras (idealizada por el interruptor) se puede representar el contenido en información de la señal muestreada por la sucesión de números  $[f(nT)]$ :

$$[f(nT)] = [f(0), f(T), f(2T), \dots, f(nT), \dots] \quad (1.1.)$$

He aquí algunas de las razones que han justificado la introducción de una teoría de manipulación de señales muestreadas o numéricas:

- gran número de aparatos de medida por su misma definición discretizan en el tiempo el tratamiento de las señales. Ejemplos: radar de impulsos, voltímetro digital.



- a menudo se utiliza un solo aparato de medida multiplexando señales diferentes, lo que supone en definitiva tratar de manera periódica cada una de las señales.

Es sobre todo el uso creciente de los calculadores numéricos en cadenas de control y regulación lo que ha dado mayor interés a esta teoría y a las técnicas que de ella se derivan, así como a las técnicas basadas en el concepto de espacio de estado, que no abordamos en estos apuntes. El funcionamiento de un calculador numérico es secuencial y las señales que procesa son secuencias de paquetes de dígitos binarios.

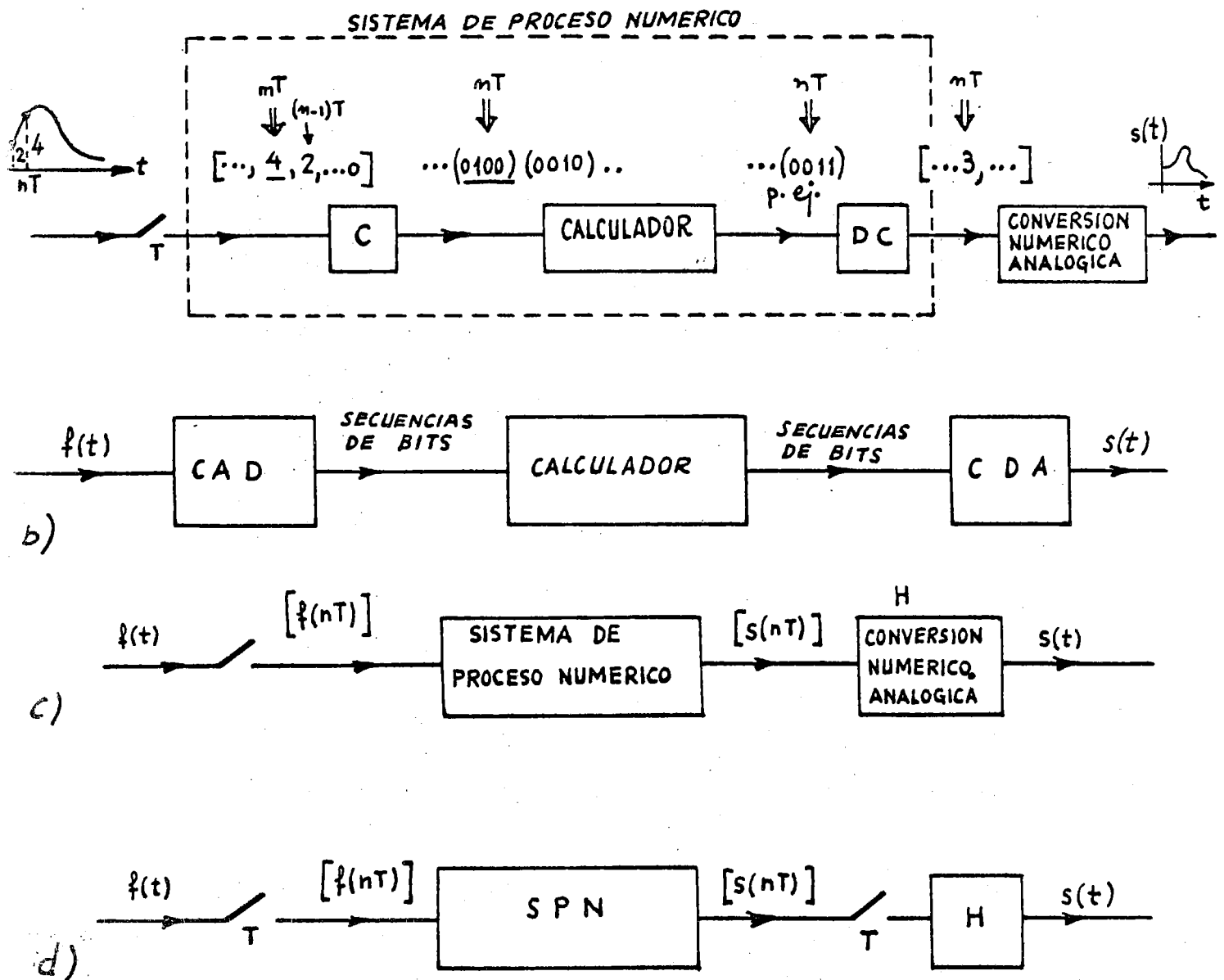


Fig. 4.

En la figura 4-a se representan para  $t = nT$  las sucesivas transformaciones que experimenta una señal  $f(t)$  cuando es muestreada, codificada (C), - procesada, decodificada (DC) y reconvertida de nuevo en señal analógica. (Para fijar ideas se ha supuesto en este caso que el calculador trata paquetes - de 4 bits). En realidad es más correcto el esquema de la figura 4-b donde - se destacan los órganos de entrada/salida llamados conversores analógico-digital (CAD) y digital-analógico (CDA).

La figura 4-c hace abstracción de los procesos de codificación y decodificación; 4-d es lo mismo que 4-c con un interruptor a la salida de SPN. - Este interruptor es superfluo y redundante pero se hace figurar a menudo en los esquemas para resaltar el hecho de que en ese punto la información es - numérica. Cualquiera de estos dos esquemas tiene la ventaja de que es aproximadamente válido para los dos modelos matemáticos de una señal muestreada.

Ya hemos considerado el primer modelo: una sucesión ordenada  $\{f(nT)\}$  de valores numéricos.

El segundo modelo precede historicamente al anterior. Supone la señal muestreada como el resultado de un proceso de modulación de la señal con - tínua por un tren de impulsos (ver fig. 5). Idealmente consideramos que en - los impulsos, de área unidad,  $\lambda \rightarrow 0$  por lo que

$$\begin{aligned} f^*(t) &= f(t) \delta_T(t) = f(t) \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(nT) \delta(t - nT) \end{aligned} \quad (1.2)$$

donde  $\delta$  es la distribución de Dirac.

$f^*(t)$  es una señal analógica que vale cero en todo momento excepto en los - instantes de muestreo donde es un impulso de superficie  $f(nT)$ , en el límite un impulso de altura  $f(nT)$ . Al ser  $f^*(t)$  analógica admite la aplicación de la transformación de Laplace, (escrita  $F^*(p)$ ), lo que no deja de ser bastante ficticio.

Por lo demás, si suponemos cierto que en la fig. 4 las operaciones de codificación y decodificación se efectúan con resolución infinita, es cierto - también que matemáticamente es lo mismo considerar un valor numérico 4 - que un impulso de altura 4. Desde el punto de vista de la información conte-

nida, ambos modelos  $[f(nT)]$  y  $f^*(t)$  son idénticos. Por lo tanto en lo que

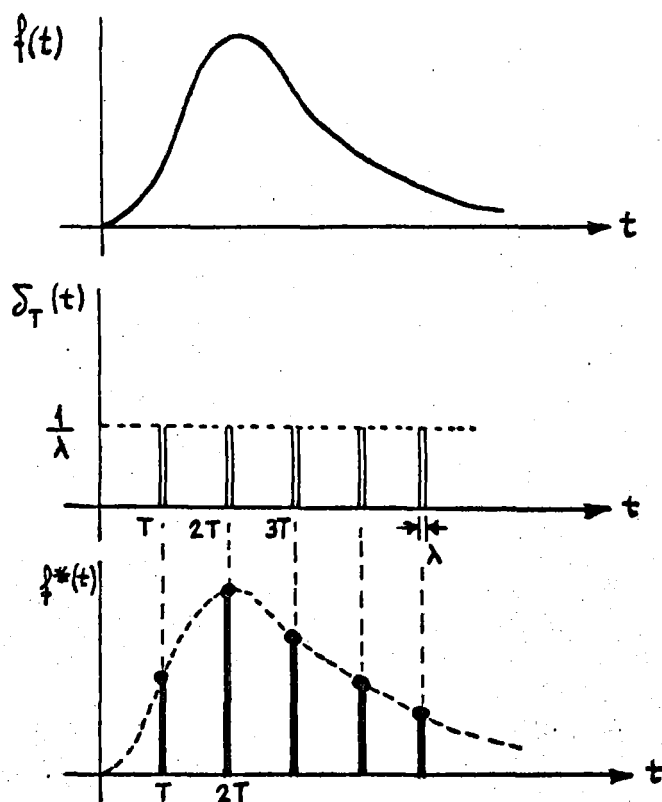


Fig. 5.

sigue de texto escribiremos siempre  $[f(nT)]$  o  $[fn]$  para abreviar, si bien en los gráficos la representación de un valor numérico se hará por medio de un punto o de un trazo vertical de altura proporcional.

El modelo analógico permite sin embargo deducir y enunciar alguna propiedad frecuencial importante, como el teorema de Shannon, que no demostraremos. Aunque decididos por el modelo numérico y por tanto la transformada en  $z$ , es preciso reconocer que en algun caso, puede ser práctico utilizar  $F^*(p)$  (ver apartado 12).

## 2.- Conversión de una señal muestreada en señal continua (Extrapoladores).

Es intuitivo que se pierde una cantidad de información al muestrear una señal, puesto que sólo se conocen los valores de ésta en determinados instantes. Estas muestras pueden corresponder a un número infinito de señales (fig. 6), Supongamos que estamos interesados en reconstituir lo más aproximadamente posible una señal original a partir de las muestras. Se quiere realizar esta operación en "tiempo real", lo que significa que la reconstitución sólo puede hacerse a base de las muestras ya recibidas; éste es un proceso

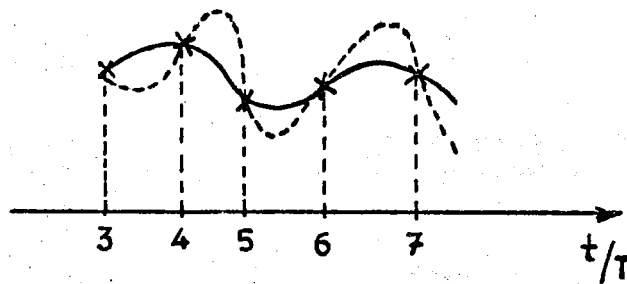


Fig. 6.

de extrapolación, válido para un solo intervalo

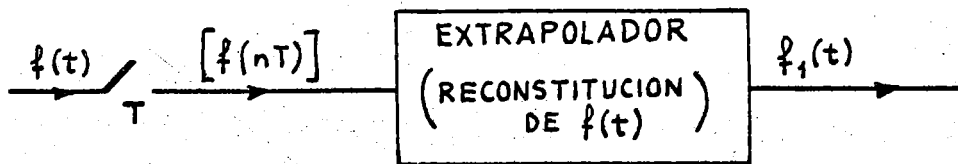


Fig. 7.

$$[f(nT)] \rightarrow f_1(t) = F \left[ f(nT), f((n-1)T), \dots, f((n-m)T), t \right]$$

$$nT \leq t \leq (n+1)T \quad (2.1.)$$

A la llegada de cada nuevo valor  $f(nT)$  el extrapolador define (por medio de la función  $F$ ) la señal continua para el intervalo siguiente. El parámetro  $m$  define el orden del extrapolador. Este es tanto más fino cuanto que  $m$  es mayor, pero al tiempo crece su complicación. Por otra parte escoger un extrapolador u otro está ligado al tipo de señal de entrada.

El extrapolador de orden cero ( $m = 0$ ) es el más simple y el más utilizado. Se define así:

$$[f(nT)] \rightarrow f_1(t) = f(nT) \quad \text{para} \quad nT \leq t \leq (n+1)T \quad (2.2.)$$

También se llama bloqueador (en inglés holder) porque mantiene el valor de la señal durante un intervalo (se anota  $H_0$ ). Ver fig. 8.

La función de transferencia de  $H_0$  es la respuesta del mismo a un

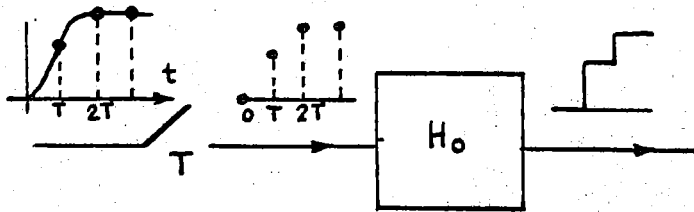
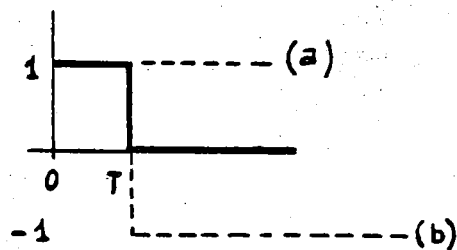


Fig. 8.

impulso unitario en  $t = 0$ . Es decir



Aplicando la propiedad de linealidad de la transformada de Laplace a las señales (a) y (b) que componen dicha respuesta y el teorema del retardo:

$$H_0(p) = \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \quad (2.3.)$$

El bloqueador reconstruye exactamente una señal en escalon, ( $f(t) = K$ ,  $\mathcal{L}[f(t)] = \frac{K}{p}$ ), ampliamente utilizada en teoría de control.

Un extrapolador de orden 1 elabora una salida continua a partir de las muestras del instante presente y del anterior, de acuerdo con la transformación:

$$[f(nT)] \longrightarrow f_1(t) = f(nT) + \frac{f(nT) - f((n-1)T)}{T} (t - nT)$$

$$\text{para } nT \leq t < (n+1)T \quad (2.4.)$$

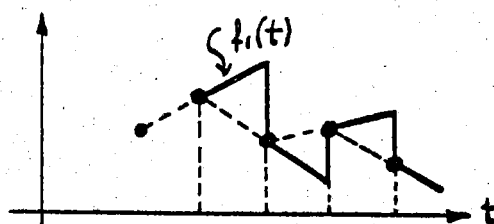


Fig. 9.

La salida entre los instantes  $nT$  y  $(n + 1)T$  es una recta cuya pendiente está definida por los valores en  $(n - 1)T$  y  $nT$ . La transmitancia  $H_1(p)$  es la respuesta a un impulso unitario en  $t = 0$ . Véase fig. 10.

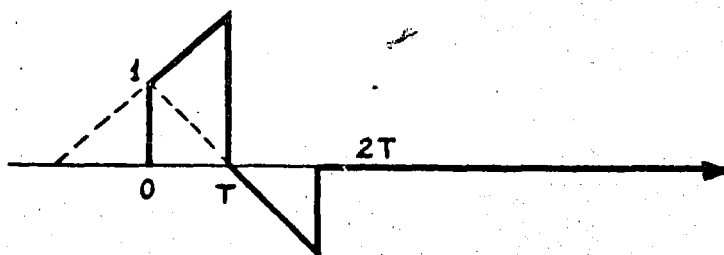


Fig. 10.

$$H_1(p) = \frac{1 + Tp}{Tp^2} (1 - e^{-Tp})^2 \quad (2.5.)$$

Es fácil hallar esta transformada aplicando las mismas propiedades - que para  $H_0$ . Puede comprobarse que tal dispositivo reconstruye exactamente una señal en rampa ( $f(t) = Kt$ ,  $\mathcal{L} \left[ f(t) \right] = \frac{K}{p^2}$ ) lo que resalta la íntima relación entre una señal continua de orden  $m$  (si llamamos así a aquella - cuya transformada de Laplace es de la forma  $K/p^{m+1}$ ) y un extrapolador polinómico del mismo orden. Esta reconstrucción es exacta, si se suponen todas las condiciones iniciales nulas, para  $t \geq mT$ . Véase fig. 11.

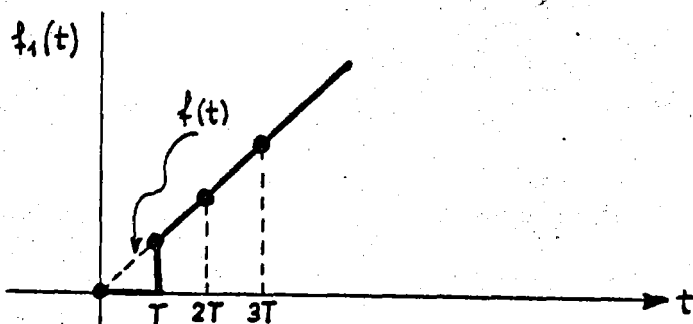


Fig. 11.

Volviendo a la fig. 7., donde parece que no tiene sentido muestrear - para extrapolar inmediatamente, con la lógica pérdida de información, supón - gase que el interruptor representa un aparato de medida con el cual nos ve - mos obligados a multiplexar  $f(t)$  y otras señales que no aparecen en el esque - ma por pertenecer a otras cadenas, Más adelante veremos otras aplicaciones

del extrapolador, específicas de un sistema de control.

Observación importante.

En adelante utilizamos por brevedad las palabras extrapolador y bloqueador como tales y como sinónimos de conversor digital-analógico, si bien esto no es del todo correcto.

3. - Definición de la transformada en z.

La transformada en z de una secuencia de valores  $[f(nT)]$  es, por definición

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(nT)\} \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} \quad (3.1.)$$

Esta definición es válida en el dominio de convergencia de la serie. - El símbolo  $z$  se utiliza para simbolizar la acción de transformar la secuencia temporal  $[f(nT)]$ . A menudo se emplea también para expresar la acción de transformar una secuencia  $[f(nT)]$  cuyo original  $f(t)$  tiene una transformada de Laplace  $F(p)$ . Así, p.ej., escribiremos  $\mathcal{Z}[F(p)]$ . Es evidente que en las condiciones enunciadas  $\mathcal{Z}[F(p)] = \mathcal{Z}[f(nT)]$ .

Por la definición (3.1.)  $F(z)$  es una función generatriz, donde  $z$  (más exactamente  $z^{-1}$ ) es un operador cuyo exponente indica el rango de cada uno de los valores de la secuencia numérica.

Supóngase la secuencia siguiente:

$$[f(nT)] = [0, 1, 4, 0, 0, 3, 2, \dots]$$

su transformada en  $z$ , si existe, será:

$$F(z) = z^{-1} + 4z^{-2} + 3z^{-5} + 2z^{-6} + \dots$$

Tomemos ahora el modelo impulsional analógico (1.2.). Admitimos - que  $f(t)$ , de la cual se obtiene  $f^*(t)$ , es transformable por Laplace, por lo que es nula para  $t < 0$  y vale para  $t \geq 0$

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) \quad (3.2.)$$

$$\mathcal{L}\{f^*(t)\} = F^*(p) = \mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT)\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \mathcal{L}\left\{\delta(t - nT)\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-nTp} \quad (3.3.)$$

Las expresiones (3.1.) y (3.3.) coinciden cuando

$$e^{Tp} = z \quad (3.4.)$$

Es decir

$$F(z) = F^*(p) \quad \left| \quad e^{Tp} = z \right. \quad (3.5.)$$

La definición (3.1.) se postula. Las expresiones (3.3.) y (3.5.) permiten enraizar con el aspecto frecuencial de los sistemas, a través de la correspondencia (3.4.) entre los espacios de las variables complejas  $z$  y  $p$ .

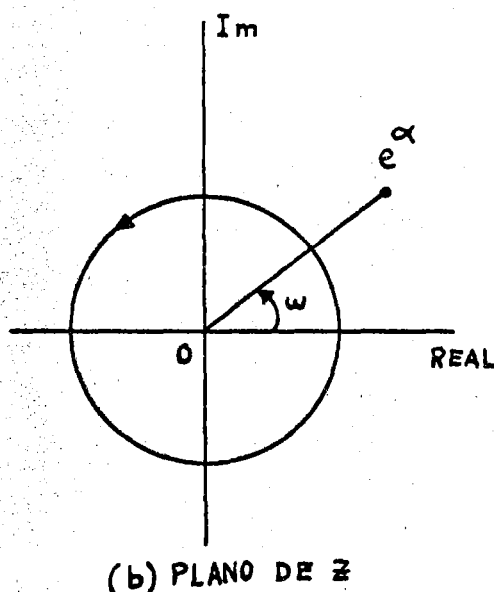
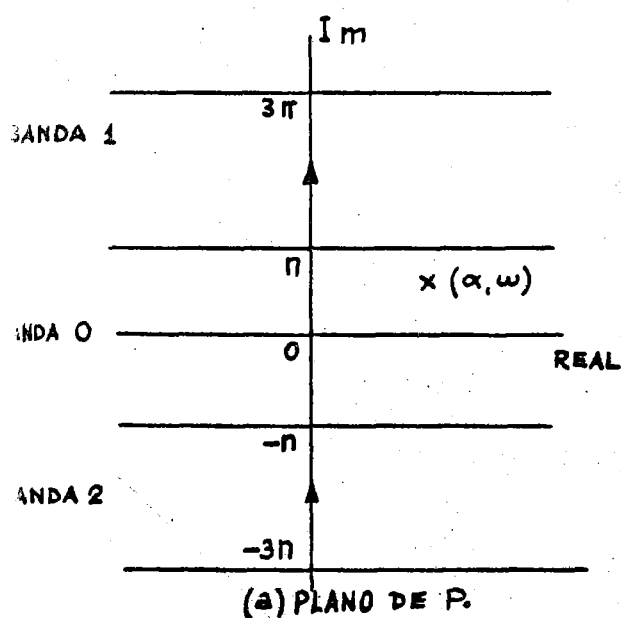


Fig. 12. (suponemos  $T = 1$ )

Un punto cualquiera  $(\alpha, \omega)$  del plano de  $p$  se transforma por (3.4.) en un punto de módulo  $e^\alpha$  y argumento  $\omega$  en el plano de  $z$ , como indica la fig. 12.b. Es fácil de comprobar que las rectas paralelas al eje imaginario en  $p$  se transforman en circunferencias de radio  $e^\alpha$  sobre el plano de  $z$ . Las rectas paralelas al eje real en  $p$  se transforman en rectas que pasan por el origen de  $z$ . En suma, el plano  $z$  muestra la periodicidad de  $e^{Tp}$  ya que el punto representativo de  $z$  es el mismo cada vez que el argumento aumenta en  $2\pi$  radianes.



El plano  $z$  debe ser considerado como una infinidad de planos superpuestos, - (como una superficie de Riemann) cada uno de los cuales sería la transformación de una de las bandas de la fig. 12.a.

Interesa observar que, en particular, el eje imaginario de  $p$  ( $\alpha = 0$ ) se transforma en la circunferencia de radio unidad en  $z$ . El semiplano izquierdo de  $p$  ( $\alpha < 0$ ) se corresponde con dicho círculo y el semiplano derecho ( $\alpha > 0$ ) con el exterior del mismo.

#### 4. - Relación entre $F(z)$ y $[f(nT)]$

##### 4.1. - Transformación directa: $f(nT) \longrightarrow F(z)$ .

Consiste simplemente (cuando se sabe o se puede) en sumar la serie obtenida a partir de la secuencia  $[f(nT)]$  según la expresión (3.1.). He aquí unos ejemplos elementales.

a). - Sea la secuencia cuyo término general es  $f(nT) = a^n$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (4.1.)$$

Esta serie es sumable si  $|az^{-1}| < 1$ . Dicho con otras palabras; la transformada  $F(z)$ , cuya expresión acaba de obtener, representa a la secuencia numérica  $[a^n]$  en un dominio  $|z| > |a|$ .

b). - Consideremos la secuencia  $[1]$ . Corresponde al caso anterior con  $a = 1$  o escalón unidad muestreado.

Por tanto

$$F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1} \quad (4.2.)$$

c). -  $[f(nT)] = 1, e^{-bT}, e^{-2bT}, \dots = [e^{-bnT}]$

Corresponde al primer caso con  $a = e^{-bT}$

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-bT} z^{-1}}$$

OBSERVACION: En los apartados b) y c) se define de igual forma el dominio de convergencia. Es de notar el peligro que existe de manipular transformadas para valores de  $z$  fuera del dominio de validez. Se olvida este rigor -

tanto más cuanto que las otras especializadas no hacen el menor hincapie en ello y en particular las tablas de transformadas no indican para nada dicho dominio. En los ejemplos a), b) y c) el dominio de validez es el exterior del circuito centrado en el origen que comprende el polo de  $F(z)$ .

#### 4.2. - Transformación inversa: $F(z) \longrightarrow [f(nT)]$ o $f(nT)$ .

##### 4.2.1. - Desarrollo en serie de potencias enteras de $z^{-1}$ .

Muy a menudo el calculador se interesa sólo por los primeros términos de la sucesión de muestras que resultan de la inversión. Esto ocurre en particular cuando se estudian la respuesta transitoria y el error en circuitos de control.

Las transformadas en  $z$  que se encuentran en la práctica son casi siempre de la forma de fracciones racionales, o sea cocientes de polinomios en  $z$  o en  $z^{-1}$ . Así

$$F(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_q z^{-q}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}} \quad (4.3.)$$

puede ser desarrollada en serie de potencias de  $z^{-1}$  por el sencillo expediente de una división de los polinomios numerador y denominador. Efectuada numéricamente se obtiene

$$F(z) = f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots \quad (4.4.)$$

Se identifica esta serie con la transformada en  $z$  de la sucesión  $[f_0, f_1, f_2, \dots, f_n, \dots]$ .

Ejemplo: Tomemos  $F(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$ .

Por división:

$$\frac{1}{1 - z^{-1}} = 1 + 1 \cdot z^{-1} + 1 \cdot z^{-2} + 1 \cdot z^{-3} + \dots + 1 \cdot z^{-n} + \dots \quad (4.5.)$$

que corresponde al caso estudiado en el apartado b) del párrafo 4.1.

#### 4.2.2.- Obtención del término general $f(nT)$ .

Enunciemos primero un teorema de Cauchy correspondiente al cálculo de una integral a lo largo de un contorno en el plano complejo.

Sea la integral  $I$  definida por

$$I = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} z^K dz \quad (4.6.)$$

Si  $\Gamma$  es un contorno cerrado que rodea el origen del plano de la variable compleja  $z$ ,  $I$  toma los siguientes valores:

$$\begin{aligned} I &= 1 & \text{si } K &= -1 \\ I &= 0 & \text{si } K &\neq -1 \end{aligned} \quad (4.7.)$$

Este teorema permite, definiendo adecuadamente  $\Gamma$ ; encontrar el término general  $f(nT)$ , utilizando la expresión

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} z^{n-1} F(z) dz \quad (4.8.)$$

donde  $\Gamma$  es un contorno cerrado cualquiera en torno del origen con la condición de que rodee todos los polos de la función  $F(z)$ , a fin de que la serie - que define  $F(z)$  (según 3.1.) tenga sentido. Comprobación de (4.8.):

De acuerdo con (4.6.) y (4.7.) todos los términos del desarrollo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} F(z) z^{n-1} dz &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} z^{n-1} \left( \sum_{m=0}^{m=\infty} f(mT) z^{-m} \right) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \sum_{m=0}^{\infty} f(mT) z^{n-m-1} dz \end{aligned}$$

se anulan salvo aquel que corresponde a  $m = n$  ( $n - m - 1 = -1$ ), para el que la integral vale  $f(nT)$ , que es un coeficiente puramente numérico.

La forma práctica de evaluar la integral (4.8.) es por el método de los residuos. En efecto, tal valor viene determinado sólo por las singularidades de la función subintegral comprendidas en el contorno,  $\Gamma$ . Resulta ventajoso desarrollar la función  $F(z)$  en fracciones parciales y calcular la transformación término a término por el método de los residuos:

$$f(nT) = \sum \text{residuos} \left[ F(z) z^{n-1} \right] \quad (4.9.)$$

respecto polos de  $F(z)$

recordando que el residuo de una función racional en un polo  $\alpha$  de la misma es igual al numerador  $A$  de la fracción  $\frac{A}{z - \alpha}$  en el desarrollo de dicha función en fracciones simples.

$$\text{Ejemplo: } F(z) = \frac{az}{z^2 - b^2}$$

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} \frac{az \cdot z^{n-1}}{(z - b)(z + b)} dz$$

$$\text{residuo en } z = b \longrightarrow \frac{a}{2} b^{n-1}$$

$$\text{residuo en } z = -b \longrightarrow \frac{a}{2} (-b)^{n-1}$$

Por tanto

$$f(nT) = \frac{a}{2} (b^{n-1} + (-b)^{n-1})$$

#### 4.3.- Tablas.

La manera habitual de calcular transformadas directas e inversas es la de referirse a unas tablas de correspondencia, tales como las que se encuentran al final de estos apuntes. Para ello es preciso manipular las funciones por los distintos artificios matemáticos conocidos (descomposición en fracciones simples y otros) y aplicar algunas propiedades de la transformación en  $z$  (teorema del retardo, linealidad...) con objeto de encontrar expresiones que figuren en dichas tablas.

### 5.- Algunas propiedades útiles de la transformación en $z$ .

#### 5.1.- Linealidad.

Supongamos dos (o más) secuencias de muestras  $\{f_n\}$  y  $\{g_n\}$  y dos (o más) constantes  $a$  y  $b$ . La propiedad de linealidad se expresa así

$$Z(a \{f_n\} + b \{g_n\}) = a F(z) + b G(z) \quad (5.1.)$$

lo que se obtiene fácilmente de la definición (3.1.).

Ejemplo. -: Hallar  $\mathcal{Z}(5nT(nT + 1))$ ;  $T$  periodo de muestreo.

Tenemos que  $5nT(nT + 1) = 5n^2 T^2 + 5nT$ .

Por las tablas sabemos que.

$$\mathcal{Z}(n^2 T^2) = \frac{T^2 z (z + 1)}{(z - 1)^3}$$

$$\mathcal{Z}(nT) = \frac{Tz}{(z - 1)^2}$$

y por (5.1.):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(5nT(nT + 1)) &= 5 \mathcal{Z}(n^2 T^2) + 5 \mathcal{Z}(nT) = 5 \frac{T^2 z (z + 1)}{(z - 1)^3} + 5 \frac{Tz}{(z - 1)^2} = \\ &= 5Tz \frac{(T + 1)z + (T - 1)}{(z - 1)^3} \end{aligned}$$

5.2.- Teorema de retardo. (válido cuando las condiciones iniciales son nulas).

Se enuncia así:

$$\mathcal{Z}[f(n - K)T] = z^{-K} F(z) \quad (5.2.)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f(n - K)T] &\triangleq \sum_{n=0}^{\infty} f_{n-K} z^{-n} = \cancel{f_{-K} z^{-0}} + \cancel{f_{1-K} z^{-1}} + \dots + \\ &f_0 z^{-K} + f_1 z^{-(K+1)} + \dots = z^{-K} (f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots) = \\ &= z^{-K} \sum_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i} = z^{-K} F(z) \end{aligned}$$

(Hemos supuesto que no existen datos numéricos para índices negativos, es decir, para  $n - K < 0$ ).

Ejemplo:

Se consideran las dos secuencias  $\{f_n\}$  y  $\{g_n\}$  de la fig. 13. La primera es una secuencia exponencial  $\{f_n\} = 1, e^{-T}, e^{-2T}, \dots$  y la segunda es la misma secuencia anterior retardada dos períodos,  $\{g_n\} = 0, 0, 1, e^{-T}, e^{-2T}, \dots$  (observese que los dos primeros datos de  $\{g_n\}$  deben ser nulos porque no existen muestras  $f_{-2}, f_{-1}$  que retardar. Por el teorema (5.2.) y por las tablas concluimos

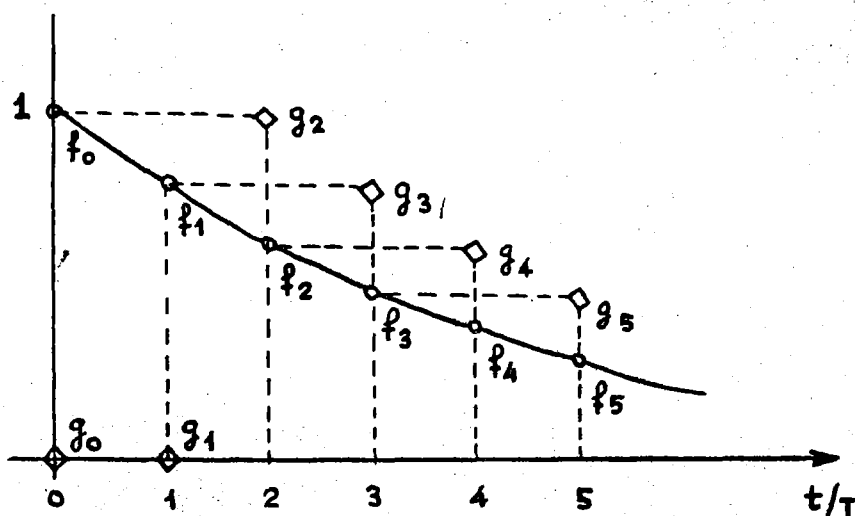


Fig. 13.

que

$$G(z) = z^{-2} F(z) = z^{-2} \frac{z}{z - e^{-T}} = \frac{1}{z(z - e^{-T})}$$

Este teorema, utilizado en sentido inverso, permite encontrar a menudo, con ayuda de las tablas, el original de algunas funciones en  $z$ . Es un teorema de gran importancia práctica.

#### 5.2.1.- Teorema generalizado del retardo. (condiciones iniciales no nulas)

Si suponemos ahora que  $f_{-K}, f_{1-K}, \dots, f_{-1}$  son no nulos

$$\mathcal{Z}\{f(n - K) T\} = z^{-K} F(z) + \sum_{m=1}^K f_{-m} z^{m-K} \quad (5.3.)$$

### 5.2.2.- Teorema del adelantò.

De forma similar se deduce el siguiente teorema:

$$\mathcal{Z}\{f(n+K)T\} = z^K F(z) - \sum_{m=0}^{K-1} f_m z^{K-m} \quad (5.4.)$$

En efecto, aplicando como siempre la definición (3.1.):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f_{n+K}\} &\triangleq \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+K} z^{-n} = f_K z^0 + f_{K+1} z^{-1} + \dots = \\ &= z^K (f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \dots + f_{K-1} z^{-(K-1)} + f_K z^{-K} + \dots) - \\ &\quad - z^K (f_0 + f_1 z^{-1} + \dots + f_{K-1} z^{-(K-1)}) = \\ &= z^K F(z) - (z^K f_0 + f_1 z^{K-1} + \dots + f_{K-1} z) \end{aligned}$$

### 5.3.- Valor inicial $f_0$ de la secuencia temporal.

En el desarrollo de la expresión (3.1.)

$$F(z) = f(0) + f(T) z^{-1} + \dots + f(nT) z^{-n} + \dots \quad (5.5.)$$

vemos que para  $z \rightarrow \infty$   $F(z) \rightarrow f(0)$ . Es decir

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (5.6.)$$

#### Ejemplo:

Aplicación a la secuencia  $\{f_n\}$  de la fig. 13.

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z}{z - e^{-T}} = 1$$

### 5.4.- Valor final $f_{\infty}$ de la secuencia temporal.

Enunciado del teorema:

$$f_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z) \quad (5.7.)$$

Demostración. -

Definamos la siguiente expresión:

$$E_N(z) = \sum_{n=0}^N f(nT) z^{-n} - z^{-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) z^{-n} \quad (5.8.)$$

Es evidente que

$$E_N(z) \Big|_{z=1} = f(NT)$$

Si  $N$  aumenta indefinidamente, las dos sumas de (5.8) tienden a  $F(z)$  porque en el límite  $N$  y  $N - 1$  tienden al mismo valor. Por tanto

$$f(\infty) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} f(NT) = \lim_{N \rightarrow \infty} E_N(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (F(z) - z^{-1} F(z)) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z)$$

$f_{\infty}$  es el valor final de la secuencia  $f(nT)$  cuya transformada en  $z$  es  $F(z)$ . Este teorema sólo da el valor final cuando tal valor existe, es decir cuando la transformada en  $z$  está correctamente definida.

Ejemplos. -

a). - Tomamos de nuevo  $F(z) = \frac{z}{z - e^{-T}}$  del párrafo 5.2.

$$f_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{z}{z - e^{-T}} = 0$$

b). - Sea  $F(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$  del párrafo 4.1.

La fórmula (5.7.) nos da

$$f_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 - az^{-1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq 1 \\ 1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$



¿Son completamente ciertos estos resultados? Veamos que no. Sabemos que el original de esta  $F(z)$  es

$$[f(nT)] = [a^n] = 1, a, a^2, \dots, a^n, \dots$$

Es decir:

Si $ a  < 1$	$f_\infty = 0$
si $a = 1$	$f_\infty = 1$
si $ a  > 1$	$ f_\infty  \rightarrow \infty$
si $a = -1$	$f_\infty$ no tiene límite; la secuencia es $1, -1, 1, -1, \dots$

Resumiendo, este último ejemplo muestra la precaución con que hay que utilizar la fórmula (5.7.), que conduce a un valor correcto sólo en los casos en que la secuencia temporal original tiene un límite definido.

Realmente, en el caso actual,  $z = 1$  pertenece al dominio de validez de  $F(z)$  cuando  $|a| < 1$ . Cuando  $|a| = 1$   $z = 1$  pertenece a la zona delicada que limita el dominio de validez.

La discusión anterior permite echar una primera mirada a las formas propias de una señal.

## 6. - Formas propias de una señal.

En la mayoría de los casos, como se ha dicho,  $F(z)$  se presenta bajo la forma de una fracción racional. La función puede descomponerse entonces en fracciones elementales según

$$F(z) = \sum_{i=1}^K \frac{b_i}{1 - a_i z^{-1}} \quad (6.1.)$$

donde  $K$  es el grado del denominador de  $F(z)$  y  $a_i$  las raíces del mismo. Nos situamos por sencillez, ya que se trata de una exposición cualitativa, en el caso de raíces no múltiples;  $a_i$  son los polos de  $F(z)$ . Escribiremos en función de  $z^{-1}$  porque, como hemos dicho anteriormente, este operador tiene más sentido físico que la propia variable  $z$ ; sin embargo razonamos siempre en el plano  $z$ .

Sea  $f^i(nT)$  la respuesta temporal relativa al término  $i$ -ésimo de (6.1.).

A causa de la linealidad puede escribirse

$$f(nT) = \sum_{i=1}^K f^i(nT) \quad (6.2.)$$

Ya hemos visto en el párrafo 4.1. y en el ejemplo b) del párrafo 5.4. que

$$f^i(nT) = b_i \cdot (a_i)^n$$

Según el valor de los  $a_i$  es posible discutir la forma de las señales elementales  $f^i(nT)$ , llamadas formas propias de  $f(nT)$ .

Pueden presentarse dos casos

1º). -  $a_i$  real

Hemos visto en el párrafo 5.4. que

si  $|a_i| < 1$  la señal tiende a cero cuando  $n \rightarrow \infty$

si  $|a_i| > 1$  " " " "

si  $a_i > 0$  la señal está compuesta de elementos positivos

si  $a_i < 0$  la sucesión es alternativa

2º). -  $a_i$  imaginario

Dado que  $a_i$  son las raíces de un polinomio con coeficientes reales, se les puede asociar siempre sus raíces conjugadas.

Sean

$$a_i = |a_i| e^{j\psi_i} \quad \text{una raíz}$$

$$b_i = |b_i| e^{j\psi_i} \quad \text{el coeficiente correspondiente a su fracción simple.}$$

Tenemos que la parte de señal resultante de ambas raíces conjugadas es

$$\begin{aligned} f^i(nT) + \bar{f}^i(nT) &= |b_i| |a_i|^n e^{j(n\varphi_i + \psi_i)} + \\ &+ |b_i| |a_i|^n e^{-j(n\varphi_i + \psi_i)} = \\ &= 2 |b_i| |a_i|^n \cos(n\varphi_i + \psi_i) \end{aligned}$$

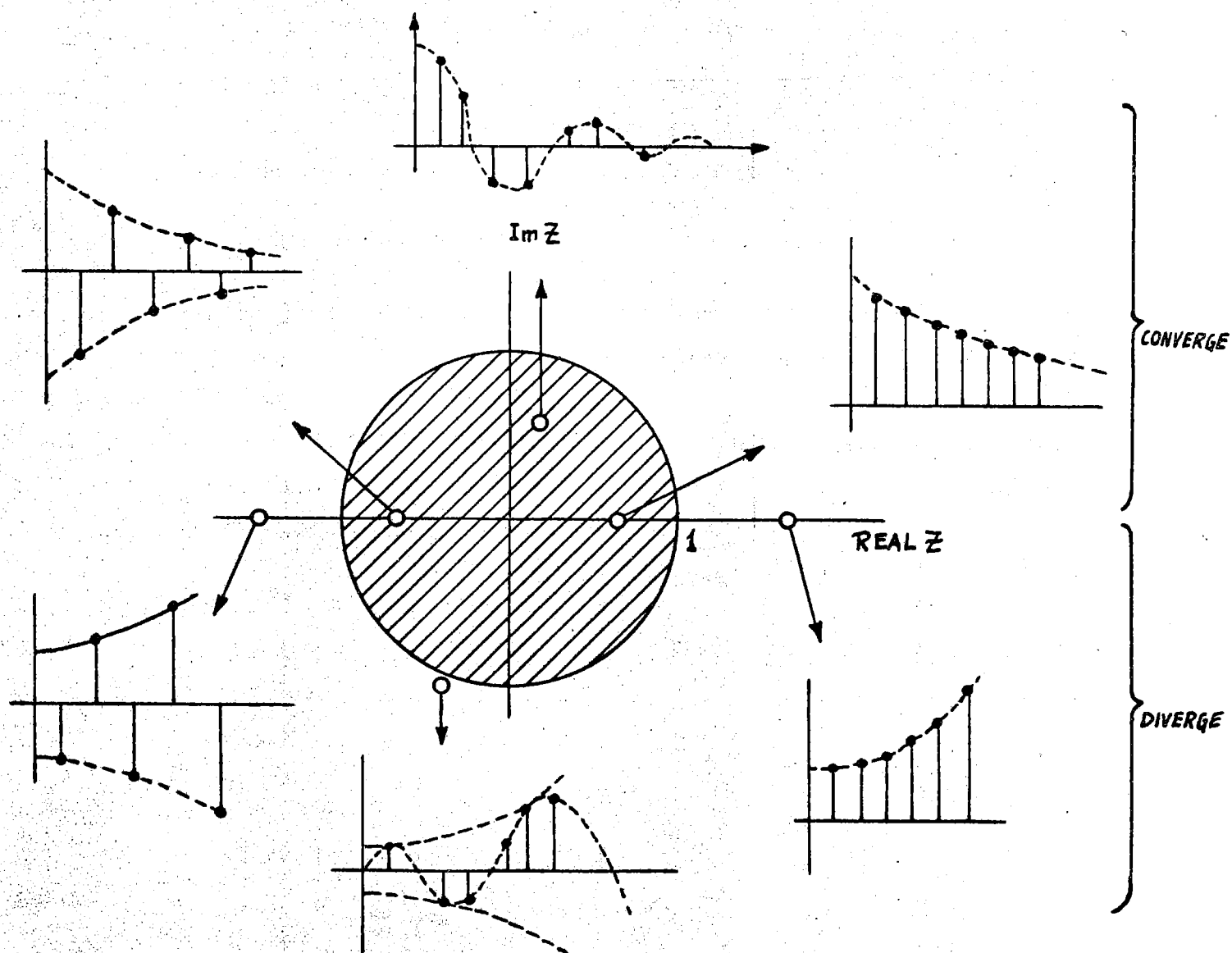


Fig. 14

Se ve que si  $|a_i| < 1$ , la señal tiene por envolvente una senoide amortiguada, mientras que si  $|a_i| > 1$  la envolvente es una senoide divergente.

Los resultados de esta discusión se representan en la figura 14 y muestran el papel fundamental que juegan los polos sobre la forma de la señal y en particular la influencia de su posición respecto al círculo de radio unidad para su comportamiento asintótico.

- Si los polos están en el círculo unitario  $f(\infty) \rightarrow 0$
- Los polos del exterior conducen a una señal divergente.
- Acerca de los polos exactamente situados sobre la circunferencia unitaria es mejor no decir nada ya que, de todas formas, en la práctica la palabra "exactamente" no tiene sentido.

#### Observaciones.

En relación con el apartado 5 es interesante verificar que todas las propiedades enunciadas son semejantes a otras definidas en el plano de la variable compleja  $p$ .

En cuanto al apartado 6, referente a las formas de las señales componentes elementales, se destaca ya la semejanza cualitativa entre el semiplano izquierdo en  $p$  y el círculo unitario.

#### 7. - Relación entre $F(z)$ y $F(p)$ .

Sea  $f(t)$  una señal de transformada de Laplace  $F(p)$ . Sea  $\{f(nT)\}$  la señal resultante de muestrear  $f(t)$  con periodo  $T$  y  $F(z)$  su transformada en  $z$ . La relación que existe entre ambas transformadas es:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) \frac{1}{1 - e^{Tp} z^{-1}} dp \quad (7.1.)$$

y la forma práctica de evaluarla

$$F(z) = \sum_{\substack{\text{respecto} \\ \text{polos de} \\ F(p)}} \text{residuos} \left[ F(p) \frac{1}{1 - e^{Tp} z^{-1}} \right] \quad (7.2.)$$

Demostración. -

De la relación clásica

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{tp} dp \quad (7.3.)$$

donde  $c$  se escoge de forma que todos los polos de  $F(p)$  queden a la izquierda de la línea de integración, obtenemos el valor de una muestra en un instante  $n$ -ésimo sin más que hacer en (7.3.)  $t = nT$

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{nTp} dp \quad (7.4.)$$

y llevando este valor numérico a la definición (3.1.)

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{nTp} dp \right] z^{-n} \quad (7.5.)$$

Suponemos que la suma converge. Entonces

$$F(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} e^{nTp} z^{-n} \right] dp \quad (7.6.)$$

Conocemos el valor de la suma subintegral por el ejemplo c) del párrafo 4.1.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{nTp} z^{-n} = \frac{1}{1 - e^{Tp} z^{-1}} \quad \text{con } |e^{Tp} z^{-1}| < 1 \quad (7.7.)$$

lo que demuestra la expresión (7.1.)

OBSERVACION. -

Es importante advertir que no se puede sustituir en (7.1.)  $z$  por  $e^{Tp}$ . Para no caer en confusión es preferible suponer que  $z = e^{Tu}$ , donde  $u$  toma también sus valores en el plano complejo de  $p$ , tales que satisfagan la condición (7.7.). Es decir:

$$|e^{Tp} e^{-Tu}| < 1 \longrightarrow |e^{Tu}| > |e^{Tp}| \longrightarrow \text{Re}(u) > \text{Re}(p) \quad (7.8.)$$

El segundo miembro de la condición (7.8.) se refiere a la parte

real de los puntos  $p$  comprendidos por el contorno de integración.

Ver figura 15.

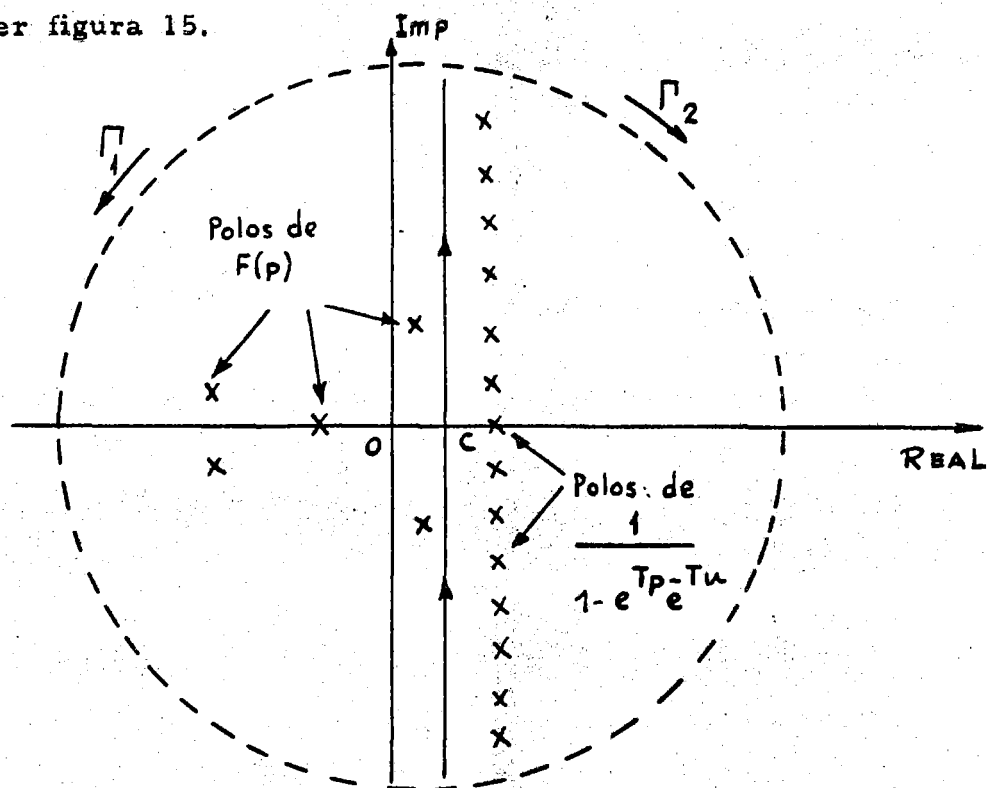


Fig. 15.

Singularidades de

$$\frac{1}{1 - e^{Tp} e^{-Tu}} :$$

$$e^{Tp} e^{-Tu} = 1 \longrightarrow Tp = Tu + 2K\pi j$$

$$p = u + \frac{2K\pi}{T} j$$

(7.9.)

Las infinitas singularidades de  $1/(1 - e^{Tp} e^{-Tu})$  están a la derecha de  $c$  y las de  $F(p)$  a la izquierda. Para aplicar el método de los residuos puede escogerse uno de los dos contornos cerrados  $\Gamma_1$  ó  $\Gamma_2$  de la fig. 15, cerciorándose de que la contribución de los puntos del contorno al valor de la integral es nula.

Si escogemos  $\Gamma_1$  el número de residuos es finito y su suma (7.2.) expresa el valor de la integral (7.1.).

Si escogemos  $\Gamma_2$  el número de residuos es infinito y su suma vale

$$F^*(p) = \frac{1}{T} \sum_{K=-\infty}^{\infty} F\left(p + \frac{2K\pi}{T} j\right) \quad (7.10.)$$

En la expresión (7.10) no aparece explícitamente la variable  $z$ , aun-

que es evidente que  $F^*(p)$  con  $p = \frac{1}{T} \ln(z)$  debe representar lo mismo que  $F(z)$ . En otras palabras  $F^*(p)$  representa la transformada de  $[f(nT)]$  en el plano de  $p$ .

### 8. - Límite inferior de la cadencia de muestreo.

No entramos mucho en los detalles sino que nos limitamos en este apartado a describir sin rigor las características armónicas de una señal muestreada de forma ideal.

Haciendo  $p = j\omega$  en (7.10.)

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j(\omega + \frac{2K\pi}{T})) \quad (8.1.)$$

cuyo módulo representamos en la fig. 16.b.

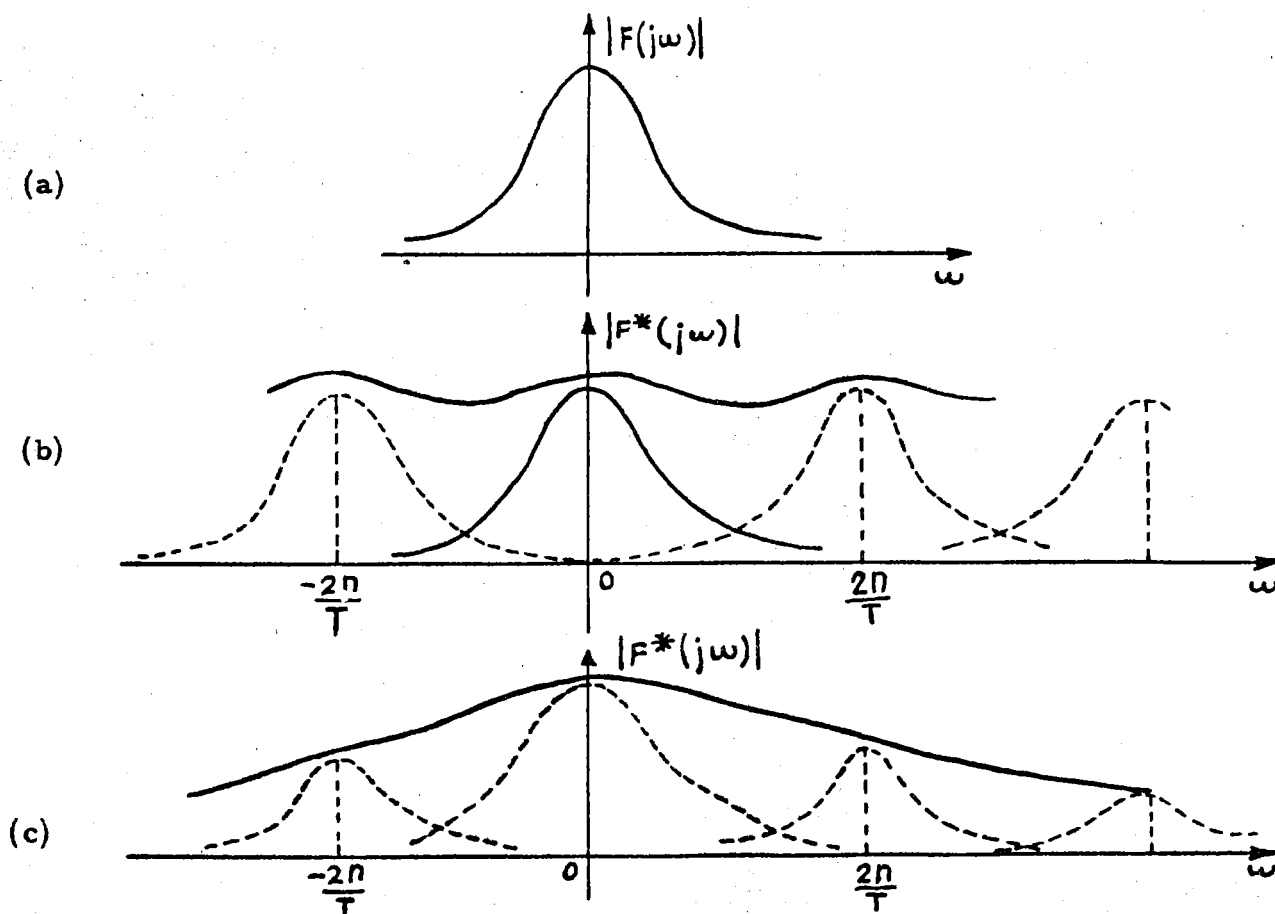


Fig. 16.

El espectro de la señal muestreada es teóricamente infinito y

$F^*(j\omega)$ , como se podía esperar, muy diferente de  $F(j\omega)$ .

Es útil advertir que en la realidad las cosas no ocurren como en la fig. 16. b. Sea por ejemplo que el muestreo no es perfecto (supongamos la modulación de fig. 5. donde los impulsos son de anchura  $\lambda$  finita); en este caso los espectros auxiliares constituyentes de la señal tienen amplitudes decrecientes con la frecuencia (fig. 16 c).

Supongamos que el espectro de la señal continua sea limitado. En la figura 16 b vemos que si la banda de  $F(j\omega)$  se encuentra comprendida entre  $-\pi/T$  y  $\pi/T$  el muestreo conduce a una repetición sin deformación del espectro de la señal continua. En otras palabras, no se produce solapamiento de los espectros auxiliares contiguos. Un filtro ideal de característica espectral rectangular (amplitud unidad, banda  $-\omega_c = -\frac{\pi}{T} \rightarrow +\omega_c$ ) situado detrás de la señal muestreada permitiría recobrar todo el contenido de información de la señal continua.

El teorema de Shannon, importante para una estimación de la frecuencia conveniente de muestreo dice lo siguiente:

"Si una señal continua tiene un espectro limitado en la banda de frecuencia  $(-f, +f)$  un muestreo de período inferior a  $1/2f$  no altera el contenido de información de la señal continua".

Este teorema que tiene sobre todo utilidad de aproximación, para escoger la frecuencia de multiplexado en casos como el discutido en la fig. 5, condiciona la cadencia de los demás muestreadores síncronos en una cadena de control en bucle cerrado, donde ya la finalidad primordial no es tanto el transmitir una información como el conseguir un funcionamiento satisfactorio según un determinado criterio (estabilidad, rapidez, errores, etc....).

De todas formas, así como no existen señales cuyo espectro pueda llamarse limitado en una zona adecuada de frecuencias, tampoco es realizable el filtro ideal rectangular con lo que resulta el hecho de que es inevitable la pérdida de información. La teoría y la práctica de los sistemas muestreados de control demuestran que éstos marchan perfectamente con filtros del tipo extrapolador polinómico, entre los cuales los más sencillos son los de orden 0 y de orden 1. Véase su característica de amplitud espectral en la fig. 17.

En conclusión, el teorema de Shannon nos da el orden aproximado del límite inferior de frecuencia de muestreo. Es evidente que no existe límite superior.



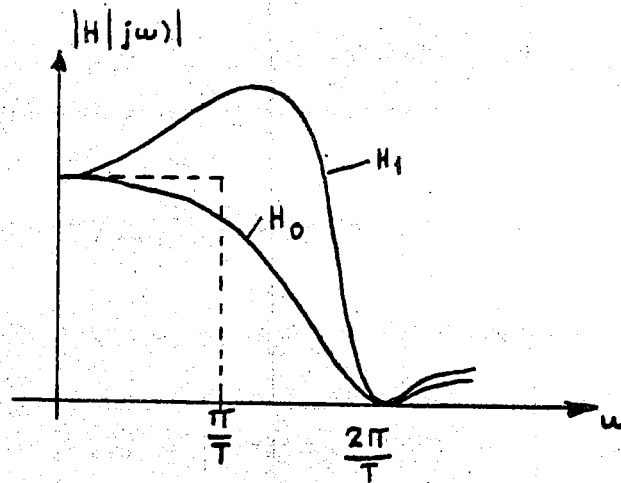


Fig. 17.

### 9. - Cuadro resumen.

El organigrama de la fig. 18 resume los principales resultados de este capítulo. La dirección de las flechas indica en qué sentido se verifican las relaciones del cuadro. En particular se ve que el paso del dominio continuo al discreto es irreversible.

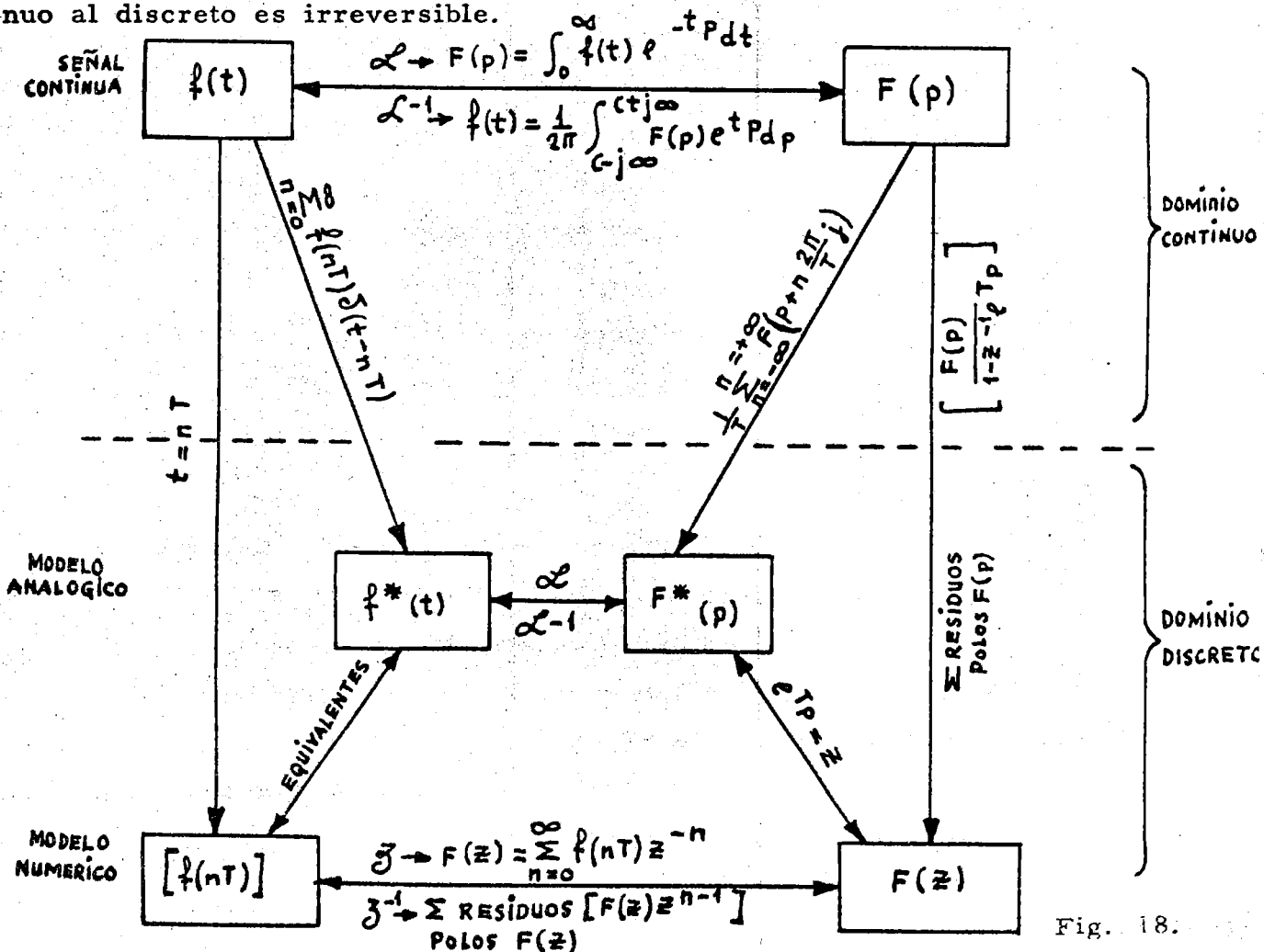


Fig. 18.

## II. - Transmisión de la señal en sistemas muestreados.

En el capítulo precedente se ha estudiado la señal y las distintas transformaciones matemáticas que describen su comportamiento antes y después de la operación de muestreo.

En este capítulo se estudiará la transmisión de la señal a través de un elemento lineal. Cuando se interconectan varios de estos elementos se constituye un sistema donde puede haber uno o varios muestreadores. Las reglas de combinación de tales elementos para encontrar la descripción de la señal en un punto cualquiera se complican. En este capítulo nos interesamos fundamentalmente por el comportamiento del sistema en los instantes de muestreo.

### 10. - Transmitancia en z. (o función de transferencia).

Se recuerda que la transmitancia de todo elemento expresa (a través de un determinado operador) la relación entre una señal de entrada y la señal de salida correspondiente. Para un elemento lineal dicha relación es independiente de la señal de entrada.

Por lo que se refiere a la transmisión de datos a través de una red pueden distinguirse, según la naturaleza de las señales de entrada y salida, cuatro tipos de situaciones, ilustradas en la fig.19, correspondientes a los cuatro tipos de conversiones siguientes:

- a). - Conversión analógica-analógica( $A \longrightarrow A$ )
- b). - " numérica-numérica( $N \longrightarrow N$ )
- c). - " numérica-analógica( $N \longrightarrow A$ )
- d). - " analógica-numérica( $A \longrightarrow N$ )

Es muy sabido que si el elemento es lineal y de parámetros invariantes con el tiempo es posible describir las características de transmisión en el caso ( $A \longrightarrow A$ ) por medio de una función de transferencia en p.

En los sistemas muestreados aparecen casos de los tipos b), c) y d). Sólo en la conversión numérica-numérica (calculadores digitales o circuitos secuenciales) puede definirse una función de transferencia en z. Más adelante ampliaremos esta noción.

Sea el caso de la fig. 19.b). Si el elemento opera sobre la secuencia de entrada  $\{e_n\}$  en forma lineal, se puede mostrar que tal elemento queda

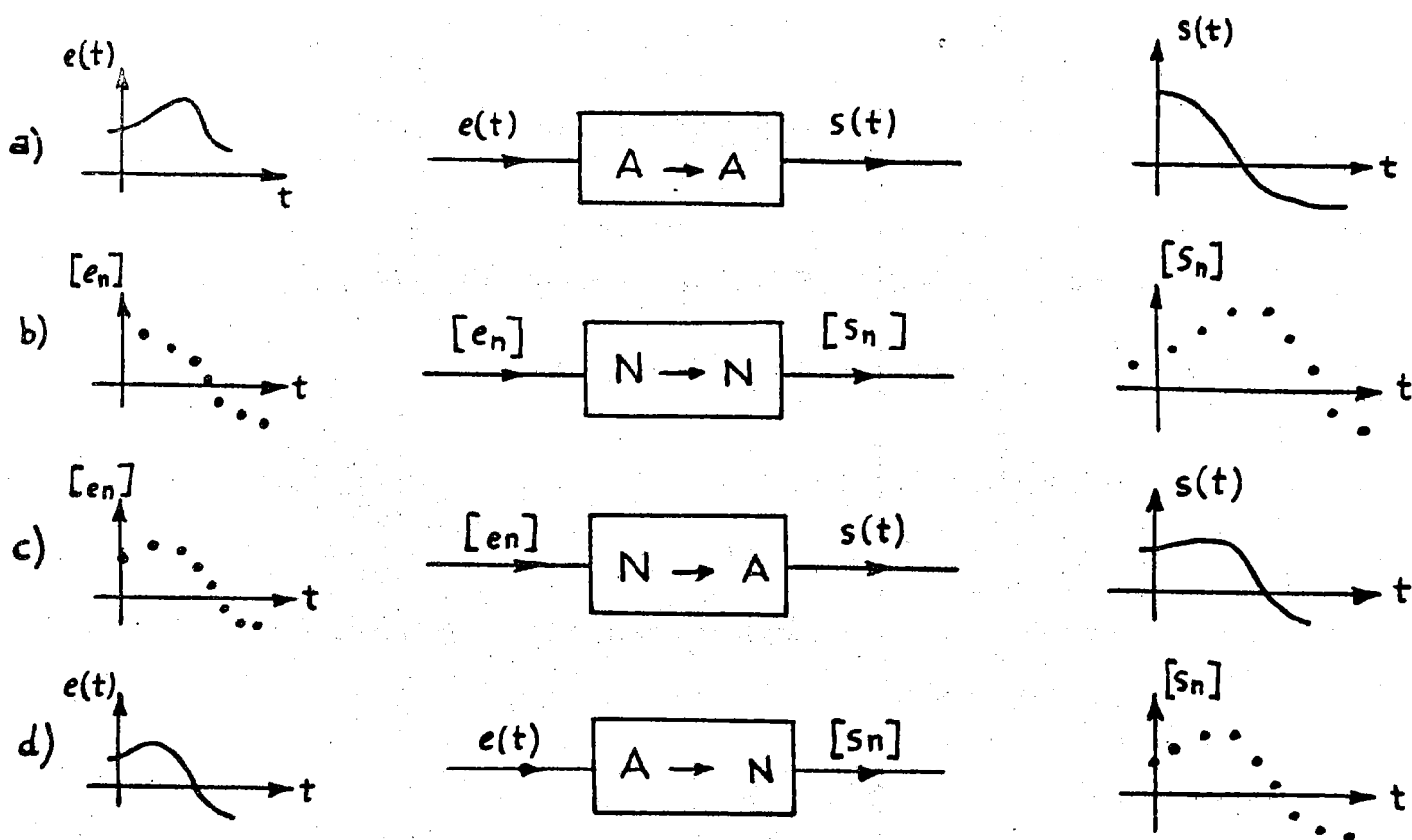


Fig. 19.

descrito enteramente por medio de una función de transferencia:

$$G(z) \triangleq \frac{\mathcal{Z}[s_n]}{\mathcal{Z}[e_n]} = \frac{S(z)}{E(z)} \quad (10.1.)$$

Consideremos de nuevo el elemento 19.a). Hemos supuesto que actúa sobre la señal de entrada  $e(t)$  en forma descrita en términos de la ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes:

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 e(t) \quad (10.2.)$$

Si aplicamos la transformada de Laplace a esta ecuación, suponiendo nulos todos los valores iniciales, obtenemos

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0) S(p) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0) E(p) \quad (10.3.)$$

y podemos definir la función de transferencia  $G(p)$  como

$$\frac{S(p)}{E(p)} \triangleq G(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} \quad (10.4.)$$

Volvamos de nuevo nuestra atención al caso  $(N \rightarrow N)$ . Suponemos que el elemento actúa sobre la secuencia de datos  $\{e_n\}$  en forma descrita en términos de la ecuación recurrente lineal, de coeficientes constantes

$$a_0 s_n + a_1 s_{n-1} + \dots + a_p s_{n-p} = b_0 e_n + b_1 e_{n-1} + \dots + b_q e_{n-q}$$

siempre con  $a_0 \neq 0$  (10.5.)

Por diversas causas (entre otras para ser coherentes con la expresión (4.3.) y por facilidad de programación) se denominan los coeficientes  $a_0, a_1, \dots$  y no  $a_n, a_{n-1}, \dots$ . Los diferentes  $s$  son los números que elabora para salida en los instantes indicados por el subíndice ( $n$  quiere decir  $nT$ ), para todo valor de  $n$ , y los diferentes  $e$  los números que recibe el elemento en los instantes correspondientes.

La relación lineal (10.5.) puede interpretarse como una fórmula por la cual el número que sale cada  $T$  segundos ( $s_n$ ) se calcula formando las sumas ponderadas de un grupo definido de números de entrada y de salida. Estrictamente este cálculo se realiza guardando en memoria los  $p - 1$  números de salida precedentes y los  $q$  números de entrada y operando con ellos y los parámetros conocidos  $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$  de acuerdo con la expresión (10.5.).

Como  $n$  es variable cada  $s_{n-i}$  ( $i = 0, 1, \dots, p$ ) representa una secuencia. Si aplicamos en (10.5) la transformada en  $z$  y la fórmula (5.2.), suponiendo nulos los valores iniciales, obtenemos

$$(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}) S(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_q z^{-q}) E(z) \quad (10.6.)$$

y definimos la función de transferencia en  $z$  como

$$G(z) \triangleq \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_q z^{-q}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}} \quad (10.7.)$$

Es fácil de comprobar que la transmitancia (10.7.) obedece a la regla multiplicativa siguiente: la transmitancia total de varios elementos (N → N) de transmitancias  $G_1(z)$ ,  $G_2(z)$ , etc., puestas en serie, es

$$G(z) = G_1(z) \cdot G_2(z) \dots \quad (10.8.)$$

Atención.- La fórmula (10.8.) es válida sólo cuando las secuencias son sincronas, lo que quiere decir que los valores de igual subíndice aparecen simultáneamente en la cadena.

Es importante observar que, dado su funcionamiento intrínsecamente discreto, es imposible definir una transmitancia en  $p$  del elemento (N → N) o dicho en otras palabras el elemento no admite ni emite señal más que en instantes periódicos determinados.

#### 11.- Ampliación de la idea de transmitancia en $z$ .

Hemos visto anteriormente que el símbolo  $\text{---}_T\text{---}$  se utiliza correctamente a continuación de una señal analógica continua para indicar que ésta es transformada en una secuencia numérica o impulsional. Una secuencia numérica puede atacar a un elemento puramente numérico (N → N) y el resultado es otra secuencia numérica de salida o puede atacar a un elemento continuo lineal (del cual puede definirse una función de transferencia en  $p$ ) y el resultado es una onda continua (caso N → A) un ejemplo: cualquier extrapolador. Sea la figura 20. Todos los elementos que en ella aparecen son lineales, analógicos y poseen su correspondiente transmitancia en  $p$ . En el punto 3 de cada uno de los casos la señal es ya discreta y de ella puede definirse una transmitancia en  $z$  del sistema entre los puntos 1 y 3 de las figs. 20(a) y 20(b), para lo cual utilizamos la transformada en  $z$  en  $p$ .

$$G(z)_{31} \triangleq \frac{S(z)}{E(z)} \quad (11.1.)$$

La diferencia entre (10.1) y (11.1.) es que el segundo caso  $S(z)$  es la transformada en  $z$  de una señal continua discretizada por un muestreador mientras que en el primero la señal era intrínsecamente discreta.

Para hallar  $G(z)_{31}$  en fig. 20 (a):

punto 2:  $S(p) = F(p) E^*(p)$

$$\begin{aligned} \text{punto 3: } S^*(p) &= \left[ F(p) \cdot E^*(p) \right]^* = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(p + \frac{2k\pi}{T}j\right) \cdot E^*\left(p + \frac{2k\pi}{T}j\right) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F\left(p + \frac{2k\pi}{T}j\right) E^*(p) = F^*(p) \cdot E^*(p) \end{aligned} \quad (11.2.)$$

de acuerdo con la ecuación (7.10.). Haciendo  $e^{Tp} = z$ , obtenemos

$$S(z) = F(z) E(z) \quad (11.3.)$$

por lo que

$$G(z)_{31} = F(z) \quad (11.4.)$$

Esto quiere decir que, si nos desinteresamos definitivamente en los puntos 1 y 3 de lo que ocurre entre los instantes de muestreo, la fig. 20(a) - puede sustituirse por la fig. 21.

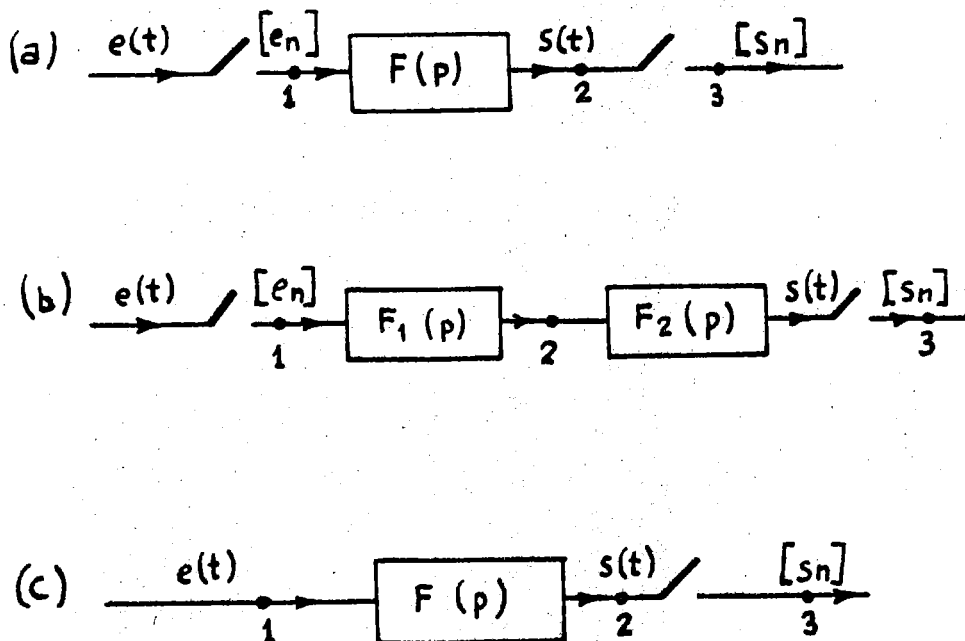


Fig. 20



Fig. 21.

donde

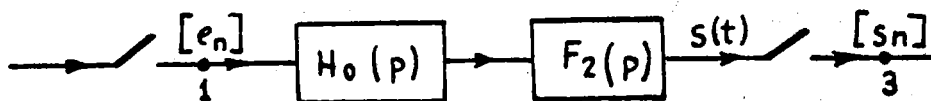
$$F(z) = \mathcal{Z} [F(p)] \quad (11.5.)$$

Resulta muy claro que, si bien las transmitancias definidas en (10.1) y (11.1.) representan ambas la correspondencia entre dos sucesiones numéricas, el funcionamiento interno de los elementos de transformación es completamente distinto. La fig. 21 y otras que seguirán esquematizan un abuso de notación corrientemente admitido.

En la fig. 20 (b):

$$G(z)_{31} = \mathcal{Z} [F_1(p) \cdot F_2(p)] \quad (11.6.)$$

Ejemplo típico (fig. 22).



$$\begin{aligned} G(z)_{31} &= \mathcal{Z} [H_0(p) \cdot F_2(p)] \\ &= \mathcal{Z} \left[ \frac{1 - e^{-Tp}}{p} \cdot F_2(p) \right] \\ &= \mathcal{Z} \left[ \frac{F_2(p)}{p} \right] - \mathcal{Z} \left[ e^{-Tp} \frac{F_2(p)}{p} \right] \\ &= \mathcal{Z} \left[ \frac{F_2(p)}{p} \right] - z^{-1} \mathcal{Z} \left[ \frac{F_2(p)}{p} \right] \\ &= (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left[ \frac{F_2(p)}{p} \right] \end{aligned} \quad (11.7.)$$

de acuerdo con (2.3.) y (5.2.).

En la fig. 20(c)  $G(z)_{31}$  no existe;  $S(z) = \mathcal{Z} [F(p) E(p)]$ .

Otros casos sencillos. -

En la figura 22,  $G(s)_{42} = \mathcal{Z}[F_1(p)] \cdot \mathcal{Z}[F_2(p)] = F_1(z) \cdot F_2(z)$   
(11.8.)

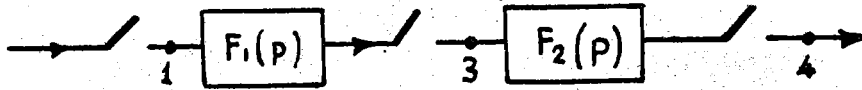


Fig. 22.

En la figura 23,

$$F(z)_{31} = \mathcal{Z}[F_1(p)] + \mathcal{Z}[F_2(p)] = F_1(z) + F_2(z) \quad (11.9.)$$

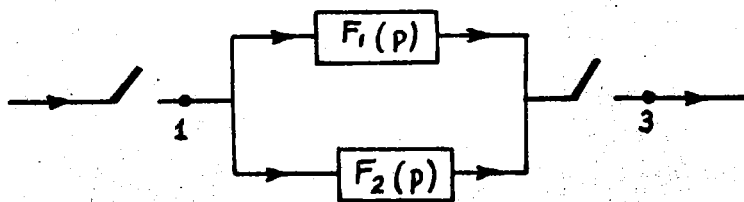


Fig. 23.

El caso de la fig. 24(a) es más sutil pero, dado que

$$\mathcal{Z}[E(p) - S(p)] = E(z) - S(z),$$

la fig. 24(a) y 24(b) son equivalentes.

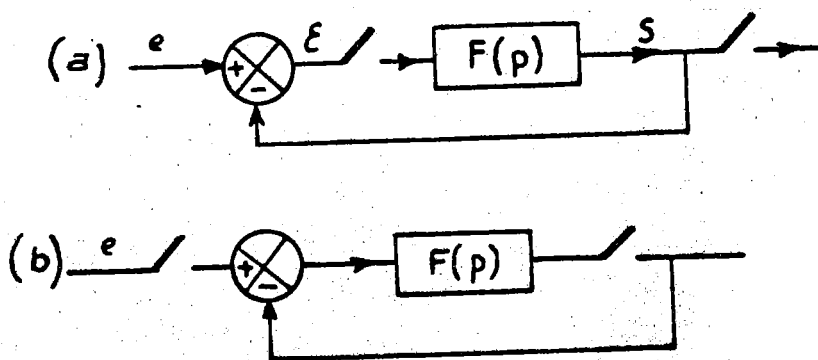


Fig. 24.



Entonces

$$S(z) = F(z) \cdot \epsilon(z) = F(z) [E(z) - S(z)]$$

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{F(z)}{1 + F(z)} \quad (11.10.)$$

Este resultado es muy importante. Significa que el sistema continuo muestreado con retorno de la fig. 24 (a) puede sustituirse (si nos interesamos por su comportamiento sólo en los instantes  $0, T, 2T, \dots$ ) por el sistema - estrictamente numérico con retorno de la figura 25, donde  $F(z) = \mathcal{Z}[F(p)]$

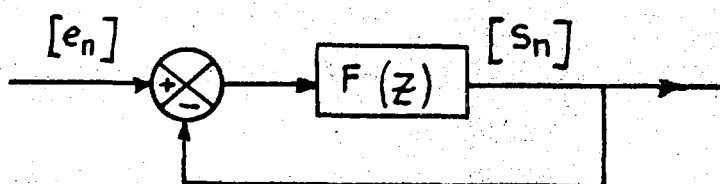


Fig. 25.

Esto nos lleva a considerar en el siguiente apartado un tema habitual en todas las obras que tratan de sistemas híbridos.

## 12. - Modelo matemático en $z$ del comportamiento discreto en los sistemas híbridos.

En un sistema híbrido la señal sufre transformaciones y aparece en unos puntos en forma discreta o discretizada y en otros en forma continua. Hemos visto ya unos ejemplos sencillos de los modelos que resultan cuando uno está interesado solamente en describir lo que ocurre en los momentos síncronos de muestreo. En sistemas más complejos es fácil equivocarse. Por ello, antes de pasar al modelo total en  $z$  es conveniente trabajar con transformadas en el plano de  $p$ . (En la práctica se mezclan a menudo dentro del mismo esquema y arbitrariamente (cuando los elementos no son  $(N \longrightarrow N)$  transformadas en  $p$  y en  $z$ ).

Para ver la forma de trabajar, estudiamos el ejemplo de la figura 26.

Lo primero que descubrimos es que es imposible definir una transmitancia en  $z$  del sistema entre 1 y 4, porque en 1 la señal es continua. Se puede buscar sin embargo  $S(z)$ .

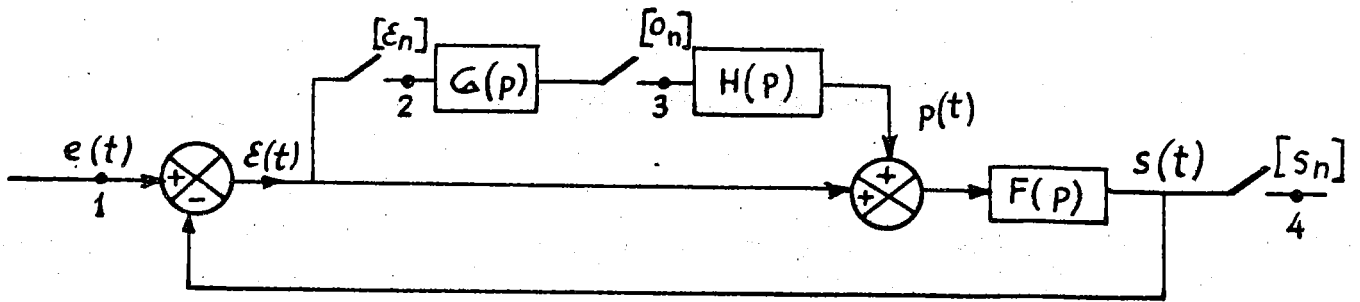


Fig. 26

$$S(p) = F(p) \left[ \varepsilon(p) + H(p) G^*(p) \varepsilon^*(p) \right]$$

de acuerdo con (11.2.)

$$S(p) = F(p) \left[ E(p) - S(p) + H(p) \cdot G^*(p) \left[ E^*(p) - S^*(p) \right] \right]$$

$$S(p) \left[ 1 + F(p) \right] = F(p) E(p) + F(p) H(p) G^*(p) E^*(p) - F(p) H(p) G^*(p) S^*(p)$$

Para abreviar escribimos en adelante  $S$  por  $S(p)$ ,  $E^*$  por  $E^*(p)$ ...  
y llamamos  $K = F/1 + F$

$$S = KE + KHG^*E^* - KHG^*S^*$$

En el punto 4:

$$S^* = (KE)^* + (KHG^*E^*)^* - (KHG^*S^*)^*$$

$$= (KE)^* + (KH)^*G^*E^* - (KH)^*G^*S^*$$

$$S^* = \frac{(KE)^* + (KH)^*G^*E^*}{1 + (KH)^*G^*}$$

en el plano de  $p$ . Haciendo  $e^{Tp} = z$ , se tiene

$$S(z) = \frac{\mathcal{Z}(KE) + \mathcal{Z}(KH) G(z) E(z)}{1 + \mathcal{Z}(KH) G(z)}$$

Se podrían estudiar otros ejemplos más complicados pero la forma de actuar es siempre la misma. La regla de oro es: Entre dos puntos sucesivos donde la señal es numérica se define una transmitancia en  $*$  y la transformada en  $*$  es lineal. La transmitancia en  $*$  se compone normalmente con las transmitancias en  $p$  del resto del sistema, de acuerdo con las reglas clásicas. Al final se efectúa la transformación en  $z$  de la señal o señales deseadas.

La utilización de los diagramas de flujo (flow graphs) facilita en muchos casos la representación discretizada del sistema. Por brevedad no desarrollamos este tema, en cierto modo secundario, que viene abundantemente tratado en varios libros americanos.

### 13. - Ecuaciones recurrentes en un sistema numérico.

Porque es una noción fundamental conviene insistir mucho en que, aunque por comodidad se estudian los sistemas en espacios complejos por métodos operacionales, estos sistemas funcionan en el tiempo y su comportamiento se describe por ecuaciones temporales. Es útil recordarse uno a sí mismo de vez en cuando que los modelos transformacionales (p. ej. la transmitancia en  $p$ ) son válidos bajo ciertas condiciones.

En el caso de la transmitancia en  $z$  ocurre algo parecido. Así en el apartado 10 quedaba definida por la expresión (10.7.) a partir de la ecuación recurrente (10.5.), sujeto a la restricción de condiciones iniciales nulas.

Tomemos de nuevo la ecuación (10.5.) suponiendo ahora que las condiciones iniciales no son nulas, es decir:

$$\left. \begin{array}{l} S(-T), S(-2T), \dots, s(-pT) \\ e(-T), e(-2T), \dots, e(-qT) \end{array} \right\} \text{ no todos } \neq 0 \quad (13.1.)$$

Si aplicamos en (10.5.) la transformada en  $z$  y la fórmula (5.3.), agrupando términos en forma conveniente

Obtenemos

$$(a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_p z^{-p}) S(z) + \mathcal{Y}(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}) E(z) + \mathcal{X}(z) \quad (13.2.)$$

con

$$f(z) = \sum_{K=1}^p a_K \sum_{m=1}^K s(-mT) z^{m-K} \quad (13.3.)$$

$$\xi(z) = \sum_{K=1}^q b_K \sum_{m=1}^K e(-mT) z^{m-K} \quad (13.4.)$$

donde (13.3.) y (13.4.) representan polinomios de corrección debidos a unas -  
C.I. no nulas.

$$S(z) = G(z) E(z) + \frac{\xi(z) - f(z)}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}} \quad (13.5.)$$

En resumidas cuentas: el comportamiento del elemento se describe  
por la ecuación recurrente (10.5.) más las condiciones iniciales (13.1.) o  
por la transformada en  $z$  de la secuencia de salida cuya expresión es  
(13.5.). En estas condiciones el concepto de transmitancia es inaplicable y  
erróneo (exactamente igual que en sistemas continuos ).

Ejemplo. - Sea un elemento descrito por la ec. recurrente

$$s_n - s_{n-1} + s_{n-2} = e_n + 0,5 e_{n-1} \quad (13.6.)$$

Aplicando (10.5.), (13.3.), (13.4.) y (13.5.) obtenemos

$$G(z) = \frac{1 + 0,5 z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}$$

$$f(z) = -s(-T) + s(-T) z^{-1} + s(-2T)$$

$$\xi(z) = 0,5 e(-T)$$

$$S(z) = \frac{1 + 0,5 z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}} \cdot E(z) + \frac{0,5 e(-T) + s(-T) - s(-2T) - s(-T) z^{-1}}{1 - z^{-1} + z^{-2}}$$

$e(-T)$ ,  $s(-T)$  y  $s(-2T)$  son valores numéricos no todos nulos, condiciones ini -  
ciales que deben estar registradas en la memoria del elemento digital.

Fisicamente es claro: de la ecuación (13.6.) obtenemos

$$s_n = e_n + 0,5 e_{n-1} + s_{n-1} - s_{n-2}$$

que en el instante inicial ( $n = 0$ ) vale:

$$s_0 = e_0 + 0,5 \cdot e(-T) + s(-T) - s(-2T)$$

El elemento necesita conocer los valores  $e(-T)$ ,  $s(-T)$ ,  $s(-2T)$  para, junto con la entrada en el instante  $t = 0$ , calcular la salida. Es evidente que el resultado es completamente distinto según los valores de las condiciones iniciales (caso particular C.I. = 0).

### 13.1. - Ecuaciones en diferencias.

Otra forma de presentar la ecuación descriptiva de un elemento numérico utiliza los sucesivos incrementos de la señal:

$$\Delta f_n = f_{n+1} - f_n \quad (13.7.)$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 f_n &= \Delta(\Delta f_n) = \Delta f_{n+1} - \Delta f_n = \\ &= f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n \end{aligned} \quad (13.8.)$$

$$\Delta^3 f_n = f_{n+3} - 3f_{n+2} + 3f_{n+1} - f_n \quad (13.9.)$$

.....

Ejemplo:  $\Delta^2 s_n + \Delta s_n + s_n = \Delta^2 e_n + 2,5 \Delta e_n + 1,5 e_n \quad (13.10.)$

Desarrollamos esta ecuación utilizando (13.7.), (13.8.), (13.9.)

$$\begin{aligned} (s_{n+2} - 2s_{n+1} + s_n) + (s_{n+1} - s_n) + s_n &= (e_{n+2} - 2e_{n+1} + e_n) + \\ &+ 2,5(e_{n+1} - e_n) + 1,5 e_n \end{aligned}$$

que se simplifica

$$s_{n+2} - s_{n+1} + s_n = e_{n+2} + 0,5 e_{n+1} + 1 \quad (13.11.)$$

La ecuación (13.11.) representa exactamente el mismo elemento que (13.6.). Por lo tanto (13.6.) y (13.10.) son formas equivalentes, aunque la primera se utiliza mucho más a menudo.

Es fácil de demostrar, acogiéndose al teorema (5.4.) que:

$$z \left[ \Delta f_n \right] = (z - 1) F(z) - z f(0) \quad (13.12.)$$

$$z \left[ \Delta^2 f_n \right] = (z - 1)^2 F(z) - z(z - 1) f(0) - z \Delta f(0) \quad (13.13.)$$

$$z \left[ \Delta^K f_n \right] = (z - 1)^K F(z) - z \sum_{i=0}^{K-1} (z - 1)^{K-1-i} \Delta^i f(0) \quad (13.14.)$$

$$\text{con } \Delta^0 f(0) = f(0) \quad (13.15.)$$

### III. - ANÁLISIS DE LOS SISTEMAS MUESTREA- DOS LINEALES.

En el capítulo anterior se han sentado las bases para describir matemáticamente la señal en distintos puntos del sistema. En el presente se analizará si esa señal es "conveniente". Al decir que una cosa es conveniente hay que decir para qué y esto depende de muchos factores, algunos subjetivos. Sin embargo existe al menos una condición primordial e inevitable en todo sistema, su estabilidad, que, en último análisis es condición ligada a la conservación del mismo. Existe una infinidad de ejemplos en cualquier clase de sistemas, sean eléctricos y mecánicos como los que aquí se tratan, sean sociales, económicos o humanos. La situación de inestabilidad es siempre la misma: un estado (una señal) del sistema que crece de forma incontrolable y destruye una parte de dicho sistema o al menos altera esencialmente su comportamiento.

El problema de la estabilidad es siempre el problema clave en el estudio de los sistemas generales, hasta el punto de que sólo se resuelve para cada caso particular. Es un problema filosófico que se convierte en técnico únicamente cuando se es capaz de precisar con criterios numéricos el límite entre las zonas de inestabilidad y estabilidad.

- Este es el caso de los sistemas lineales que, como ya se ha dicho, es una aproximación ideal de la realidad. Es el único caso (no deja de ser un caso particular) donde pueden extraerse, como veremos consecuencias generales aplicables a todos los sistemas lineales.

En este capítulo se verán algunos criterios importantes sobre la estabilidad de los sistemas pulsados lineales y consideraciones acerca de los regímenes permanente y transitorio de las señales de respuestas en los sistemas estables. Dicho con palabras más claras: se analiza primero si el sistema es estable y si lo es, se investiga, en función de la parte de la zona de estabilidad en que se encuentra, de qué forma se comporta en el transcurso del tiempo. Lo interesante en los sistemas lineales es que este estudio se realiza cómodamente sobre el plano de una variable compleja.

#### 14. - Estabilidad.

##### 14.1. - Definición y condiciones de estabilidad.

Un sistema lineal es estable cuando la respuesta a una entrada fini-

ta es también finita. Para los sistemas pulsados este criterio enuncia que un sistema es estable si la sucesión de impulsos (ó números) a la salida es de valores finitos cuando la sucesión de entrada es de valores finitos. Esto deja subsistir la posibilidad de que si la salida es una señal continua muestreada - pueda diverger mientras que las muestras que de ella se obtienen son de valor finito y limitado. Véase, p. ej., la figura 27. donde la oscilación crece sin - límites con pasadas por cero casualmente sincronizadas con el muestreador.

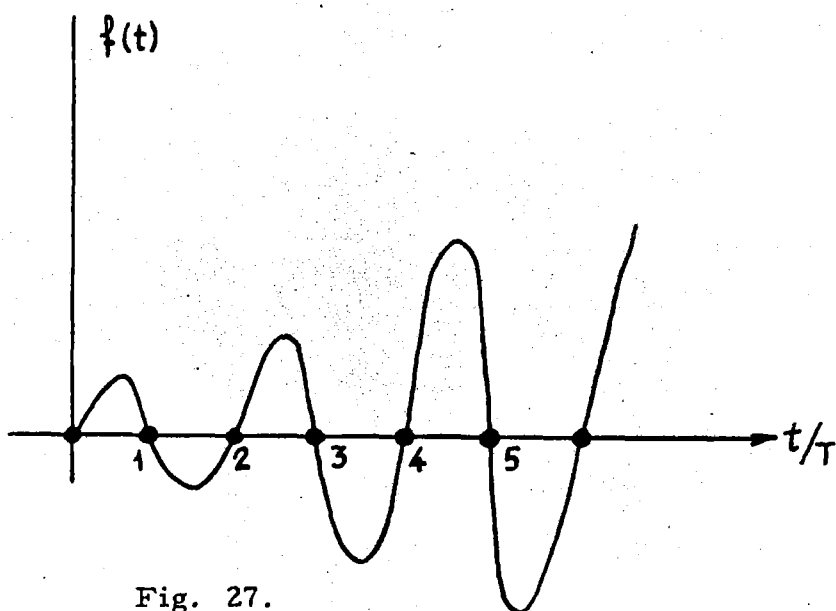


Fig. 27.

Este es un fenómeno raro que sólo se produce en teoría si el periodo de la oscilación oculta es exactamente igual y está en fase con el de muestreo de la señal. Dejamos de lado esta eventualidad y nos atenemos al enunciado de la estabilidad propuesto más arriba.

Sea la fig. 28 que representa para nosotros un sistema ( $N \rightarrow N$ ) o un sistema ( $N \rightarrow A$ ) cuya salida está discretizada por un muestreador. - Suponemos, ya que no influye sobre la estabilidad, que las C.I. son nulas...

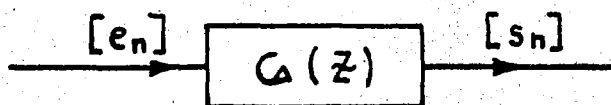


Fig. 28.

Si la transmitancia en  $z$  es  $G(z)$  se tiene por definición

$$G(z) = \sum_{K=0}^{\infty} g(KT) z^{-K} \quad (14.1.)$$



donde  $g(KT)$  es el valor numérico  $K$ -ésimo de la secuencia respuesta del sistema a un impulso unitario en  $t = 0$ . Por aplicación de la propiedad de linealidad se puede obtener fácilmente el término general de la respuesta del sistema a la secuencia de entrada  $[e_n]$  :

$$s(nT) = \sum_{K=0}^{\infty} g(KT) \cdot e[(n-K)T] \quad (14.2.)$$

Dado que suponemos  $[e_n]$  constituida por valores finitos

$$\max |e[(n-K)T]| = M < \infty \quad (14.3.)$$

donde  $M$  es un número positivo cualquiera. Para que el sistema sea estable de acuerdo con el enunciado anterior,  $[s_n]$  debe estar constituida de valores finitos para todo  $n$ , es decir

$$|s(nT)| < \infty \quad (14.4.)$$

pero

$$|s(nT)| = \left| \sum_{K=0}^{\infty} g(KT) \cdot e[(n-K)T] \right| \leq \sum_{K=0}^{\infty} |g(KT)| \cdot |e[(n-K)T]|$$

$$\leq M \sum_{K=0}^{\infty} |g(KT)| \quad (14.5.)$$

de lo que resulta que se satisface la condición (14.4.). Si

$$\sum_{K=0}^{\infty} |g(KT)| < \infty \quad (14.6.)$$

Se puede demostrar que la condición (14.6.) es necesaria y suficiente para asegurar la estabilidad del sistema. Sin embargo, aunque riguroso, (14.6.) no es un criterio de uso práctico. Interesa encontrar criterios referidos a la transmitancia o a las transformadas de las señales.

Busquemos la condición necesaria que ha de satisfacer la transmitancia  $G(z)$  cuando el sistema es estable. La relación

$$\sum_{K=0}^{\infty} |g(KT)| |z^{-K}| < \infty \quad (14.7.)$$

se satisfará, a causa de (14.6.), en el dominio  $|z^{-1}| < 1$  o, lo que es igual, en  $|z| > 1$ , es decir en el exterior del círculo de radio unidad y centro en el origen del plano de la variable compleja  $z$ .

Por consiguiente se satisface la desigualdad siguiente

$$\sum_{K=0}^{\infty} g(KT) z^{-K} \ll \sum_{K=0}^{\infty} |g(KT)| \cdot |z^{-K}| \quad (14.8.)$$

Resulta de (14.7.) y (14.8.) que, para  $|z| > 1$ :

$$\sum_{K=0}^{\infty} g(KT) \cdot z^{-K} < \infty \quad (14.9.)$$

La condición (14.9.) exige que para que un sistema de transmitancia  $G(z)$  sea estable,  $G(z)$  debe estar determinada analíticamente en todos los puntos fuera del círculo unitario del plano  $z$ .

Razonemos ahora sobre la inestabilidad. Para ello consideramos un sistema descrito por una función de transferencia en  $z$  que tiene polos situados al exterior del círculo unitario y busquemos la condición de inestabilidad. Para este sistema, debe existir al menos un valor de  $z$  tal que  $|z^{-1}| < 1$  o  $|z| > 1$  para el cual

$$\sum_{K=0}^{\infty} g(KT) z^{-K} = \infty \quad (14.10.)$$

Asimismo

$$\sum_{K=0}^{\infty} |g(KT)| > \sum_{K=0}^{\infty} |g(KT)| \cdot |z^{-K}| > \sum_{K=0}^{\infty} g(KT) z^{-K} = \infty$$

(14.11.)

La desigualdad entre el primero y último términos de (14.11.) satisface a la condición de inestabilidad (14.6.).

Resumimos los resultados importantes como conclusión del apartado 14.1.:

Un sistema pulsado estable tiene una transmitancia  $G(z)$  que no contiene polos ni otras singularidades situadas al exterior del círculo unitario del plano  $z$ .

Un sistema pulsado inestable tiene una transmitancia  $G(z)$  que contiene uno o varios polos u otras singularidades al exterior del círculo unitario (Fig. 29).

Ejemplo. - Tómesese el caso corriente de un sistema cuya transmisión tiene la forma de (10.7.), considérese excitado por una secuencia cualquiera de entrada de valores finitos y razónese exactamente como en el apartado 6, sustituyendo allí  $F(z)$  por  $G(z)$ .

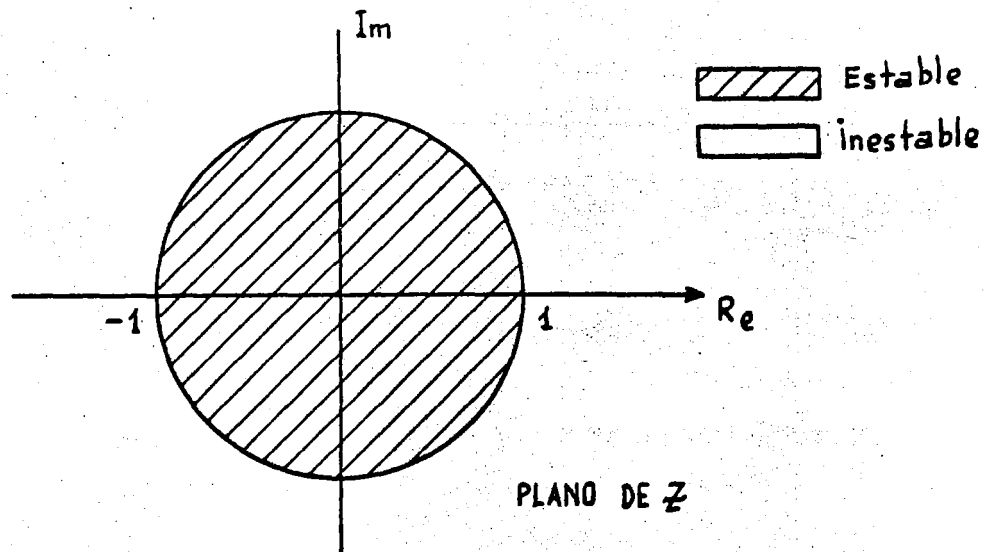


Fig. 29.

#### 14.2. - Algunos criterios de estabilidad.

##### 14.2.1. - Criterios algebraicos.

Estos criterios se aplican directamente al denominador de la función de transferencia. Basados en propiedades de los polinomios determinan de forma absoluta si el sistema es o no estable y no proporcionan otra clase de información sobre el comportamiento del mismo. Tienen la ventaja de que no hacen necesario el conocimiento de las raíces de la ecuación característica, pero en cambio pueden inducir a error si los coeficientes de la ecuación no son conocidos con precisión o son susceptibles de variaciones.

En general estos criterios se utilizan muy poco, al menos en teoría de control.

##### a). - Criterio de Jury.

Sea la ecuación algebraica

$$D(y) = A_0 + A_1 \cdot y + A_2 y^2 + \dots + A_n \cdot y^n = 0$$

$$A_n > 0$$

(14.12.)

que suponemos corresponde al denominador de la función de transferencia  $G(z)$ . En este caso  $y = z$ .

El criterio establece las condiciones para que los módulos de las raíces de (14.12.) sean inferiores a 1. Se divide en dos partes:

a. 1).-

Formar el cuadro siguiente:

$y^0$	$y^1$	$y^2$	-----	$y^{n-1}$	$y^n$
$A_0$	$A_1$	$A_2$	-----	$A_{n-1}$	$A_n$
$A_n$	$A_{n-1}$	$A_{n-2}$		$A_1$	$A_0$
$B_0$	$B_1$	$B_2$	-----	$B_{n-1}$	
$B_{n-1}$	$B_{n-2}$	$B_{n-3}$		$B_0$	
$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_{n-2}$		
$C_{n-2}$	$C_{n-3}$	$C_{n-4}$	$C_0$		
-----					
$S_0$	$S_1$	$S_2$	$S_3$		
$S_3$	$S_2$	$S_1$	$S_0$		
$R_0$	$R_1$	$R_2$			

donde

$$B_K = \begin{vmatrix} A_0 & A_{n-K} \\ A_n & A_K \end{vmatrix}, \quad C_K = \begin{vmatrix} B_0 & B_{n-1-K} \\ B_{n-1} & B_K \end{vmatrix}$$

$$D_K = \begin{vmatrix} C_0 & C_{n-2-K} \\ C_{n-2} & C_K \end{vmatrix}, \dots, R_0 = \begin{vmatrix} S_0 & S_3 \\ S_3 & S_0 \end{vmatrix}, R_2 = \begin{vmatrix} S_0 & S_1 \\ S_3 & S_2 \end{vmatrix}$$

a. 2).- Verificar las condiciones siguientes:

1)  $D(1) > 0$

$$2) D(-1) \begin{cases} > 0 & \text{si } n \text{ par} \\ < 0 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

$$3) |A_0| < A_n$$

$$|B_0| > |B_{n-1}|$$

$$|C_0| > |C_{n-1}|$$

.....

$$n + 1) |R_0| > |R_2|$$

Si todas son satisfechas el sistema es estable.

Ejemplo.- Sea un sistema cuya transmitancia total en  $z$  es

$$G(z) = \frac{K(z + 0,5)}{z^3 - z + K(z + 0,5)}$$

Tenemos  $D(z) = 0,5K + (K - 1)z + z^3 = 0$

Cuadro:

$z^0$	$z^1$	$z^2$	$z^3$
0,5K	K - 1	0	1
1	0	K - 1	0,5K
$0,25K^2 - 1$	$0,5K(K-1)$	$1 - K$	

Condiciones de estabilidad:

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad D(1) = 1,5K > 0 \\ (2) \quad D(-1) = -0,5K < 0 \end{array} \right\} \longrightarrow K > 0$$

$$(3) \quad |0,5K| < 1 \longrightarrow K < 2$$

$$(4) \quad |0,25K^2 - 1| > |1 - K|$$

De las condiciones (1) a (3) deducimos que, para que el sistema en cuestión sea estable, el parámetro  $K$  tiene que valer  $0 < K < 2$ . La condición (4) disminuye aún el margen de valores útiles de  $K$ . En la fig. 30 se ve gráficamente que  $K$  debe valer  $0 < K < K_1$  donde  $K_1$  es la solución de

$$-(0,25K_1^2 - 1) = -(1 - K_1) \longrightarrow K_1 = 2(\sqrt{3} - 1)$$

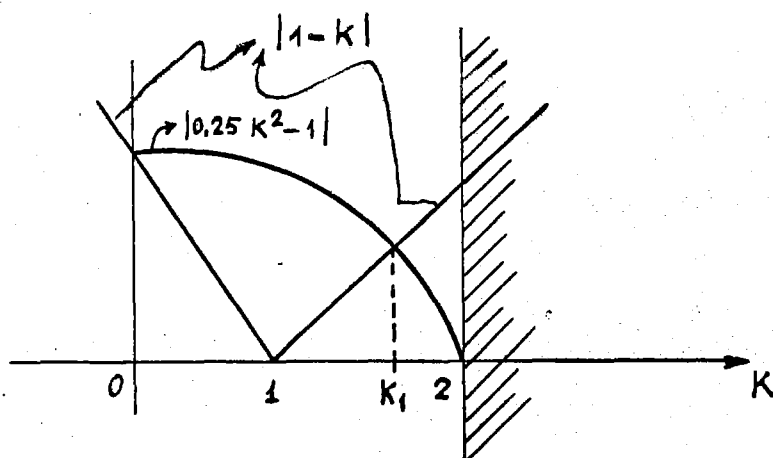


Fig. 30.

b) Criterio de Routh modificado.

El criterio de Routh, muy conocido en matemáticas, permite determinar los signos de las partes reales de las raíces de un polinomio racional. Este criterio se utiliza directamente para la búsqueda de la condición de estabilidad de un sistema lineal continuo aplicándolo a la ecuación característica. - La presencia o ausencia de raíces con partes reales positivas es una indicación de inestabilidad o estabilidad.

Consideremos de nuevo la ecuación característica,

$$D(y) = A_n y^n + A_{n-1} y^{n-1} + \dots + A_1 y + A_0 \quad (14.12.)$$

donde  $y \equiv p$  para los sistemas continuos analógicos.

Se construye la siguiente tabla triangular:

$y^n$	$A_n$	$A_{n-2}$	$A_{n-4} \dots$
$y^{n-1}$	$A_{n-1}$	$A_{n-3}$	$A_{n-5} \dots$
$y^{n-2}$	$B_1$	$B_2$	$B_3 \dots$
$y^{n-3}$	$C_1$	$C_2 \dots$	
$y^1$	$H_1$		
$y^0$	$J_1$		

Las casillas de las dos primeras filas se llenan con los coeficientes de la ecuación (14.12.) en la forma indicada. El resto de las filas se com

pone con arreglo al siguiente esquema:

$$B_1 = \frac{A_{n-1} \cdot A_{n-2} - A_n \cdot A_{n-3}}{A_{n-1}} ; B_2 = \frac{A_{n-1} A_{n-4} - A_n A_{n-5}}{A_{n-1}} ; \dots$$

$$C_1 = \frac{B_1 A_{n-3} - A_{n-1} B_2}{B_1} ; C_2 = \frac{B_1 A_{n-5} - A_{n-1} B_3}{B_1} ; \dots$$

etc, .....

El criterio de Routh dice: El número de raíces inestables es igual al número de cambios de signo en la primera columna de la tabla.

Ejemplos y algunas particularidades de este criterio pueden encontrarse en todos los libros de teoría de servosistemas clásicos. Pero en el caso de sistemas pulsados el criterio es inaplicable en su forma original porque el hecho de que una ecuación polinómica en  $z$  tenga o no tenga raíces con parte real positiva no dice nada sobre la estabilidad del sistema. Es posible, no obstante, aplicar a la ecuación característica en  $z$  una transformación que haga corresponder a la región exterior al círculo unitario en el plano de  $z$  el semiplano derecho de un plano auxiliar y a la región del círculo el semiplano izquierdo de esta nueva variable. Dos transformaciones bilineales son posibles:

$$\lambda = \frac{z + 1}{z - 1} \longrightarrow z = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} \quad (14.13.)$$

$$= \frac{z - 1}{z + 1} \longrightarrow z = \frac{1 + w}{1 - w} \quad (14.14.)$$

Si suponemos que nos quedamos con la primera, vamos a buscar la relación entre los planos de  $z$  y de  $\lambda$ . Llamamos

$$z = x + j y \quad (14.15.)$$

$$\lambda = u + j v \quad (14.16.)$$

llevando (14.15) a ((14.13), tenemos

$$\lambda = \frac{(x^2 + y^2) - 1}{(x - 1)^2 + y^2} - j \frac{2y}{(x - 1)^2 + y^2} \quad (14.17.)$$

Por la definición de  $x$  e  $y$  en (14.15.) se ve que  $(x^2 + y^2)$  es el

cuadrado del módulo de  $z$  entonces, para todos los valores de  $z$  cuyo módulo es superior a la unidad, la parte real de  $\lambda$  es positiva y para todos los valores de  $z$  cuyo módulo es inferior a la unidad, la parte real de  $\lambda$  es negativa. Las partes rayadas de la figura 31 expresan la correspondencia global entre los planos de las variables  $z$  y  $\lambda$ . El criterio de Routh es aplicable a -

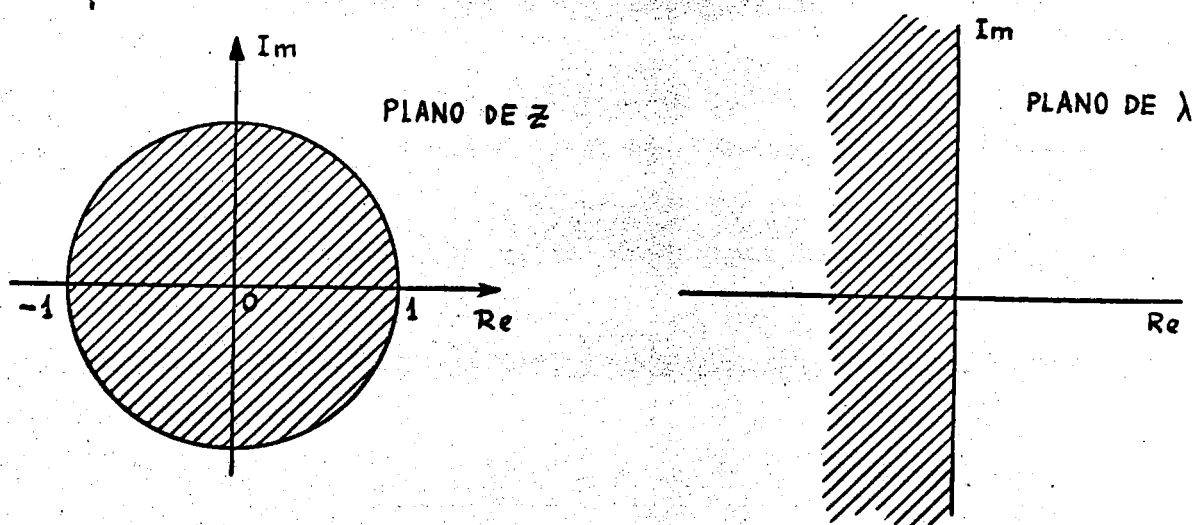


Fig. 31.

la ecuación característica después de transformación en  $\lambda$ .

Ejemplo. - Sea

$$G(z) = \frac{z^{-1}(1 - 0,5 z^{-1})}{1 - 1,6 z^{-1} + 0,48 z^{-2}}$$

o lo que es igual

$$G(z) = \frac{z - 0,5}{z^2 - 1,6 z + 0,48}$$

Aplicando la transformación (14.13.) a la ecuación característica -  
 $z^2 - 1,6 z + 0,48 = 0$ ,

$$\frac{(\lambda + 1)^2}{(\lambda - 1)^2} - 1,6 \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} + 0,48 = 0$$

$$0,12 \lambda^2 - 1,04 \lambda - 3,08 = 0$$

El criterio de Routh da la tabla



$\lambda^2$	0,12      -3,08
$\lambda^1$	-1,04
$\lambda^0$	-3,08

donde se observa un cambio de signo de 0,12 a -1,04, luego una raíz inestable. En efecto, las soluciones de la ecuación característica en  $z$  son 0,4 y 1,2, ésta última inestable.

El criterio de Routh puede ser de aplicación fastidiosa si la ecuación característica es de un orden elevado por el número de condiciones, sobre todo si varios coeficientes están por determinar (caso de síntesis). En cambio si los coeficientes de la ecuación característica son todos numéricos el método puede ser útil como verificación, mucho más si aprovechando su mecánica sistemática se ha programado en calculador digital.

#### 14.2.2. - Criterios geométricos.

Prácticamente toda la teoría que se ha desarrollado hasta el momento en las páginas anteriores no se refiere (salvo aplicaciones accidentales) a sistemas con bucle. Es aplicable por tanto a todo sistema que propaga una señal, siempre que se satisfagan las condiciones establecidas en el contexto.

Los criterios geométricos de estabilidad son específicos en cambio de los sistemas de control o sistemas con retorno. Entre ellos existe un criterio de Nyquist generalizado a los sistemas de muestreo que es demasiado complicado para que consideremos interesante incluirlo aquí.

La representación geométrica del lugar de raíces o de Evans, que describe en el plano de la variable compleja el mapa de los polos de la transmitancia total del sistema en bucle cerrado, proporciona el criterio eficaz por excelencia. El lugar de raíces, que se utiliza mucho en el estudio de los servos continuos clásicos, es sobre todo la herramienta básica en el análisis y en la síntesis de sistemas pulsados. Una de las razones principales de su éxito en la síntesis de correctores numéricos es que, siendo la transmitancia del corrector una ecuación numérica, puede uno permitirse el lujo de situar exactamente una singularidad donde más convenga.

Consúltase el anexo nº 2, donde se encuentra una descripción prolija del lugar de Evans, con un ejemplo de aplicación a sistemas pulsados.

### 15. - Régimen permanente; error en la respuesta a entradas-tipo.

Del régimen permanente nos interesa en general la precisión, es decir cuánto vale el error o diferencia entre el resultado deseado y el resultado obtenido. Hablamos de sistemas con bucle.

Es costumbre en la teoría de servosistemas de referirse para el estudio del comportamiento de los mismos a entradas muy conocidas, como entradas en escalón, en rampa, sinusoidales, etc...

Consideramos sistemas de retorno unitario como el representado en la fig. 25, suponiendo que  $F(z)$  o  $G(z)$  (como se quiera llamar) son de la clase particular más extendida, la de fracciones racionales en  $z$  o  $z^{-1}$ .

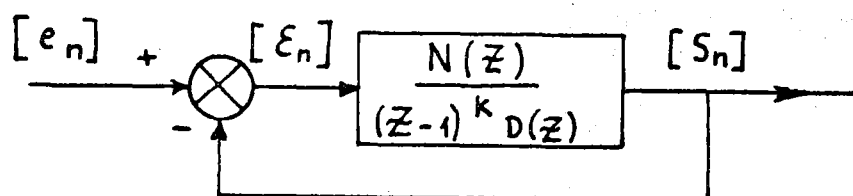


Fig. 32.

$G(z) = \frac{N(z)}{(z-1)^K D(z)}$  donde  $N(z)$  y  $D(z)$  son polinomios que no tienen la raíz  $z = 1$ . El denominador de  $G(z)$  puede tener la raíz  $z = 1$  ninguna vez, 1 vez, dos veces, etc..... lo que viene resaltado por el factor  $(z-1)^K$  ( $K = 0, 1, 2, \dots$ ) que juega un papel fundamental en la precisión final del sistema.

En efecto, si hallamos la transformada en  $z$  de la secuencia de valores del error:

$$\frac{\varepsilon(z)}{E(z)} = \frac{1}{1 + F(z)} = \frac{1}{1 + \frac{N(z)}{(z-1)^K D(z)}} = \frac{(z-1)^K D(z)}{(z-1)^K D(z) + N(z)} \quad (15.1.)$$

$$\varepsilon(z) = \frac{(z-1)^K D(z)}{(z-1)^K D(z) + N(z)} \cdot E(z) \quad (15.2.)$$

La expresión (15.2.) muestra claramente cómo el error va ligado no solamente a la transmitancia del sistema sino también al tipo de entrada. Dado que en servosistemas se utilizan mucho entradas en escalón (suponemos por simplicidad de amplitud unidad)  $[1]$ , en rampa  $[nT]$ , en aceleración  $[nT]^2$ , etc..... cuyas transformadas son

$$\frac{z}{z-1}, \frac{Tz}{(z-1)^2}, \frac{T^2 z (z+1)}{(z-1)^3}, \dots$$

de ahí el interés de destacar en  $G(z)$  el factor  $(z-1)^K$ . Lo que hacemos es considerar fijos en  $G(z)$  los polinomios  $N(z)$  y  $D(z)$  y ver qué pasa con el error para cada una de las entradas-tipo, al variar  $K$ . El resultado es la tabla siguiente que da el error final del sistema para cada entrada y cada  $K$ .

$[e_n]$	$E(z)$	$\varepsilon(\infty)$			
		$K=0$	$K=1$	$K=2$	$K=3$
$[1]$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{D(1)}{N(1)+D(1)}$	0	0	0
$[nT]$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\infty$	$T \frac{D(1)}{N(1)}$	0	0
$[nT]^2$	$\frac{T^2 z (z+1)}{(z-1)^3}$	$\infty$	$\infty$	$\frac{2T^2 \cdot D(1)}{N(1)}$	0

Esta tabla se obtiene fácilmente por aplicación del teorema (5.7.) del valor final.

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \cdot \varepsilon(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{(z-1)^K D(z)}{(z-1)^K D(z) + N(z)} E(z) =$$

(15.3.)

$$= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{(z-1)^K D(z)}{(z-1)^K D(z) + N(z)} E(z)$$

Ejemplo. - Supongamos  $[e_n] = [nT]$ ,  $E(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$ ,  
 $K = 2$ . Aplicando (15.3.):

$$\begin{aligned} \varepsilon(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \cdot \frac{(z-1)^2 D(z)}{(z-1)^2 D(z) + N(z)} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{D(z) \cdot T}{(z-1)^2 D(z) + N(z)} = 0 \end{aligned}$$

La conclusión es importante: Un sistema funciona sin error final cuando su transmitancia en  $z$  tiene polos  $z = 1$  cuya multiplicidad  $K$  es la misma que la de los polos  $z = 1$  de la señal de entrada.

Por semejanza con el caso continuo, donde un polo  $p = 0$  representa una integración, se dice que un polo  $z = 1$  es una integración numérica.

En algunos libros se habla de coeficientes generalizados de error - respecto a entradas cuyo modelo matemático es un polinomio. La cuestión no nos parece de interés práctico suficiente para incluirla aquí.

#### 16. - Régimen transitorio.

Un estudio del régimen transitorio sólo puede hacerse en los casos particulares porque depende siempre del sistema, de la entrada y de las condiciones iniciales.

No obstante damos una breve idea enumerativa y simplificada de los factores que intervienen en un estudio de esta clase.

Sea la respuesta de nuestro sistema a un estímulo  $[e_n]$  expresada por la ecuación (13.5.):

$$S(z) = \frac{A(z)}{B(z)} E(z) + \frac{I(z)}{B(z)} \quad (16.1.)$$

donde  $A(z)$  y  $B(z)$  son numerador y denominador respectivamente de la transmitancia total del sistema,  $E(z)$  la transformada de la secuencia de entrada  $e_n$  -  $I(z)$  el polinomio correspondiente a las condiciones iniciales.

Consideramos estable nuestro sistema. Sabemos (ver apartado 6) que la forma de la respuesta depende de la situación de los polos en el círculo de radio unidad y también del residuo  $b_i$ . En la figura 14 no puede hacerse una estimación del residuo pero es evidente que la importancia de un polo si-

tuado cerca de la circunferencia unitaria es tanto mayor cuanto mayor es el residuo correspondiente.

Por simplicidad suponemos que en la ecuación (16.1.) los polos de  $E(z)$  y las raíces de  $B(z)$  son distintos y que todos los polos que allí aparecen son simples. Entonces puede descomponerse de la forma siguiente:

$$S(z) = \sum_{i=1}^p \frac{\ell_i}{1 - p_i z^{-1}} + \sum_{j=1}^m \frac{r_j}{1 - p_j z^{-1}} \quad (16.2.)$$

donde  $p$  es el número de raíces de  $B(z)$  y  $m$  el número de polos de  $E(z)$ . La respuesta temporal es la transformada inversa de (16.2.) fácilmente obtenida a partir de las tablas, conocidos  $\ell_i$ ,  $p_i$ ,  $r_j$ ,  $p_j$ . Resumiendo:

1º.- Los polos de  $E(z)$  (2ª. suma en la ecuación (16.2.) determinan la naturaleza del régimen permanente o respuesta forzada; los residuos  $r_j$  relativos a estos polos vienen determinados por los coeficientes de  $A(z)$ ,  $B(z)$  y  $E(z)$ .

2º.- Los ceros  $B(z)$  (polos de la transmitancia, 1ª. suma de la ecuación (16.2.) determinan la naturaleza del régimen transitorio; los residuos  $\ell_i$  relativos a estos polos dependen de los coeficientes de  $A(z)$ ,  $B(z)$ ,  $E(z)$  e  $I(z)$ .

Observación.- El hecho de que las condiciones iniciales influyen sólo sobre la forma de régimen transitorio; puede utilizarse para mejorar este último. (Existe un método, llamado de inicialización de correctores numéricos basado en este extremo)

#### IV . - SINTESIS DE SISTEMAS NUMERICOS DE CONTROL.

##### 17. - Problema general de la síntesis.

Todo empieza cuando se tiene un proceso cuyo comportamiento, por unas razones o por otras, debe estar siempre dentro de unas especificaciones. Debido a las perturbaciones, muy a menudo de caracter aleatorio, el proceso puede comportarse de forma peligrosa o antieconómica. Entonces se comprende la necesidad de ejercer una acción que contrarreste el efecto de la perturbación y lleve el sistema a los cauces deseados. Se quiere naturalmente que esta acción se ejerza a la vista de la desviación del comportamiento, es decir en todo momento o lo que es igual en bucle cerrado.

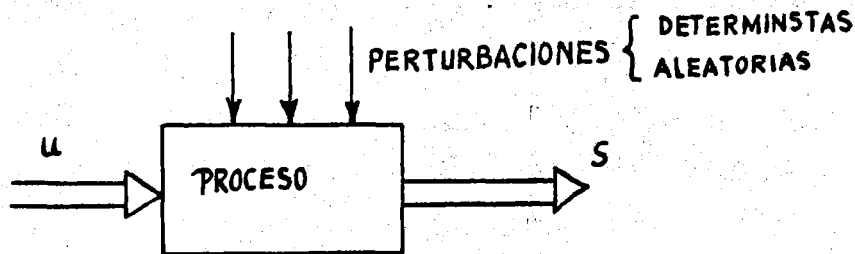


Fig. 33.

En la figura 33 s representa esquemáticamente el comportamiento y u la acción que hay que ejercer.

En general, u, s y las perturbaciones son vectores de varias dimensiones. En este texto no consideramos más que señales de una dimensión y de caracter determinista.

Las especificaciones sobre el comportamiento del proceso suelen ser de dos tipos:

- generales (estabilidad; una determinada tolerancia en el error final; alguna limitación en las sobretensiones del regimen transitorio).
- particulares (p.ej. exigencia de un tiempo mínimo de respuesta para una entrada dada, etc.....)

Habitualmente se representan por un criterio o función de coste.

Lo primero con que debe contar el ingeniero que diseña un sistema de control es con un modelo matemático "adecuado" del proceso a gobernar. Cuando se dice "adecuado" se quiere significar que este modelo debe representar suficientemente, y con exclusión de otros detalles, aquellas funciones del

proceso que son determinantes para su control. De pasada diremos que encontrar el modelo matemático de un proceso complejo es la parte más pesada, - más importante y más difícil en un tratamiento integrado. Las técnicas teórico-experimentales que se emplean para ello se llaman técnicas de identificación y puede decirse que se están desarrollando actualmente.

Una vez se cuenta con el modelo matemático del proceso (en nuestro caso suponemos que no habrá problema y que conoceremos la ecuación diferencial o la transmitancia en  $p$ ) comienza el trabajo de síntesis del sistema de mando.

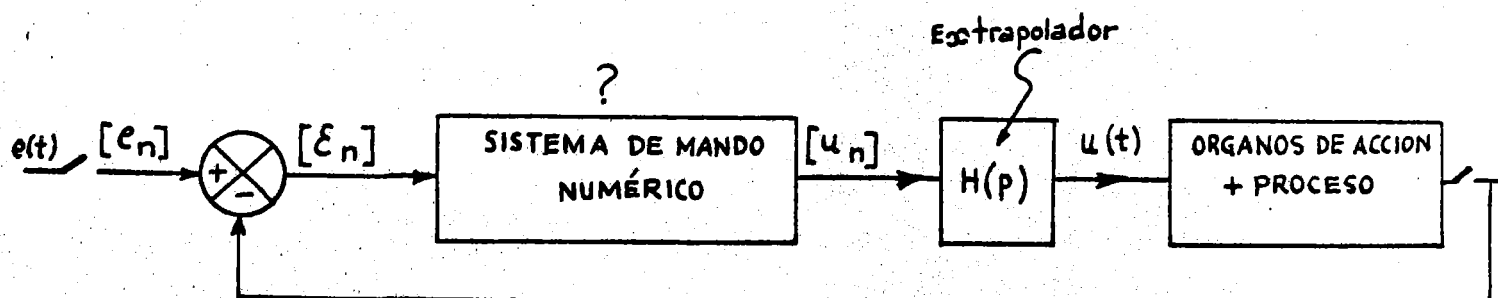


Fig. 34.

Suponiendo el esquema general de la fig. 34. el camino que hay que recorrer es el siguiente:

1º.- Anteproyecto sobre el papel. Aplicando las técnicas de transformada en  $z$  se busca la transmitancia en  $z$  del sistema de mando que producirá en todo momento la secuencia  $[u_n]$  adecuada. De esta transmitancia se deduce la ecuación recurrente que va a ser programada.

2º.- Se realiza una simulación numérica o híbrida del sistema integrado para ver si el comportamiento teórico es satisfactorio. Si no es así se vuelve al paso primero.

3º.- Experimentación, ensayos reales. Si algo no va bien se vuelve al paso primero.

En el resto del capítulo tratamos sólo el primer paso.

#### 18.- Reglas importantes en la síntesis en $z$ .

Sea la fig. 35 el modelo discretizado de la fig. 34.

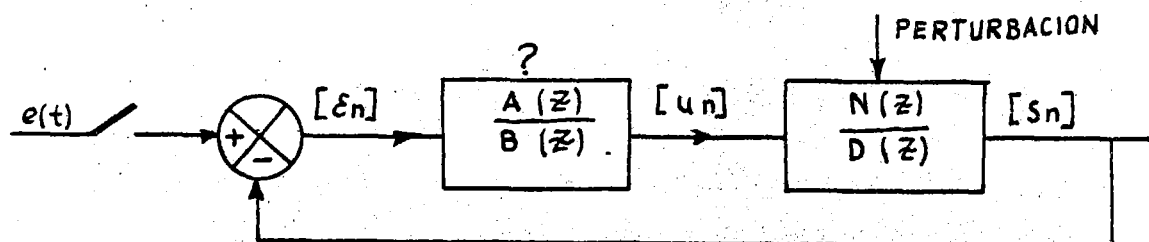


Fig. 35.

$N(z)$  y  $D(z)$  son conocidos. Se buscan  $A(z)$  y  $B(z)$ .

La transmitancia en bucle abierto es

$$\frac{A(z) \cdot N(z)}{B(z) \cdot D(z)}$$

con objeto de reducir en lo posible la transmitancia se intentará anular la mayor cantidad de ceros y de polos del proceso. Si fuera posible se haría

$$\begin{aligned} A &= D \cdot A' \\ B &= N \cdot B' \end{aligned} \quad (18.1.)$$

donde  $A'$  y  $B'$  son polinomios en  $z$  o en  $z^{-1}$ . Desgraciadamente no hay posibilidad de hacer (18.1.) entre otras razones porque  $N(z)/D(z)$  es solamente un modelo matemático aproximado. Lo que ocurre entonces es que, por ejemplo, si  $(x)$  representa en la fig. 36 una singularidad del proceso y  $y(0)$  un cero del sistema de mando que intenta compensarlo, los siguientes casos son posibles:

1º.- La singularidad es estable. El cero no cambia la situación más que en el sentido de producir un transitorio de menor amplitud (residuo de pequeño valor).

2º.- La singularidad es inestable. El resultado es que el sistema diverge de todas formas, aunque comience con menor amplitud.

3º.- Si la singularidad estuviera "exactamente" situada en la circunferencia unitaria es compensable por un cero en el interior. En la realidad la singularidad estará un poco dentro o un poco fuera del círculo.



El símbolo  $\square$  representa el polo resultado de la interacción singularidad proceso/cero sistema de mando

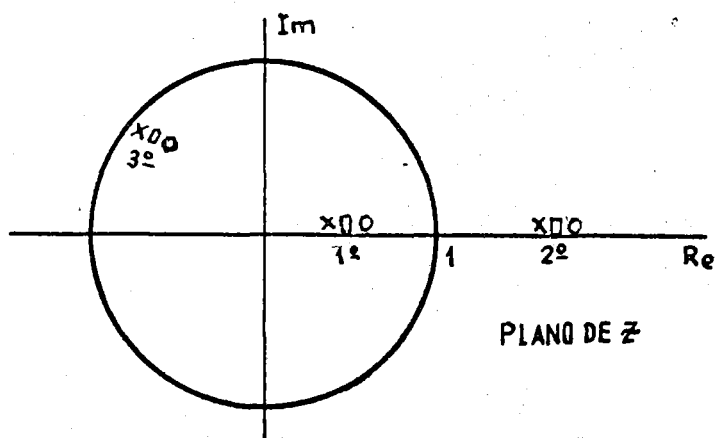


Fig. 36.

El resultado de esta discusión es que sólo pueden compensarse los polos estables.

Si escribimos

$$\frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}} \quad (18.2.)$$

la condición de realizabilidad en tiempo real (relacionado con la recurrencias de las secuencias  $[u_n]$  y  $[\varepsilon_n]$  es que  $a_0 \neq 0$ ). Si  $a_0 = 0$  el sistema sería anticipativo, es decir en el instante  $nT$  elaboraría  $u(nT)$  calculado a partir de  $\varepsilon((n+1)T)$ , lo que es imposible. Razonando sobre una transmitancia con polinomios en  $z$  y no  $z^{-1}$ , tal como en (18.3.)

$$\frac{U(z)}{\varepsilon(z)} = \frac{B_0 z^r + B_1 z^{r-1} + \dots + B_r}{A_0 z^s + A_1 z^{s-1} + \dots + A_s} \quad (18.3.)$$

el sistema es realizable si  $s \geq r$ . Esta es exactamente la misma condición, expresada con otras palabras.

En vistas a estudiar el error en régimen permanente es conveniente hacer un estudio en la línea del apartado 15 para introducir en  $B(z)$  el número deseado de raíces  $z = 1$ , si se trabaja con entradas-tipo.

Nada más puede decirse como regla general. El resto, por ejemplo todo lo que sigue en el capítulo, es, con ligeras variantes, aplicación particular.

# 19. - Sistemas de control que minimizan el tiempo de respuesta del proceso.

Se quiere que en el sistema de la fig. 35 la secuencia de valores del error sea nula a partir de un tiempo finito y mínimo, para una entrada y una perturbación dadas. Llamando por conveniencia  $x \equiv Z^{-1}$  y conocidas las transformadas en  $x$  de la señal de entrada  $R(x)/L(x)$  y del error  $P(x)/Q(x)$ , tenemos el esquema de la figura 37.

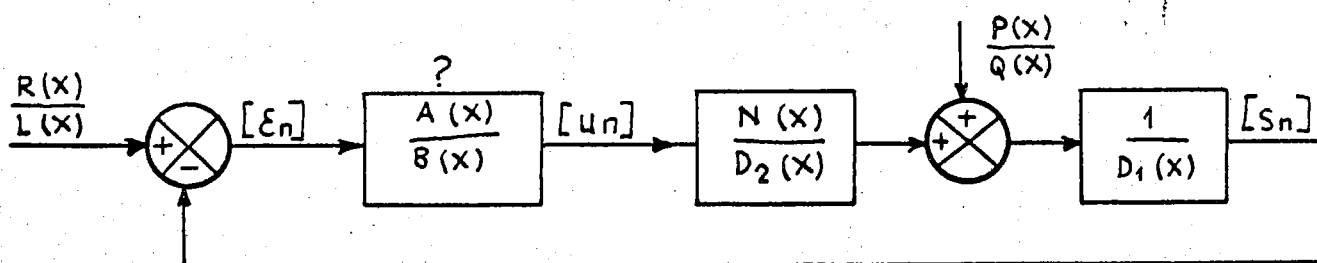


Fig. 37.

Se supone que  $D_1(x)$  representa los polos de la parte del proceso que es afectada por la perturbación.

No escribimos el argumento  $x$  a partir de este momento.

$$\epsilon = \frac{R}{L} \cdot \frac{B D_1 D_2}{B D_1 D_2 + A N} - \frac{P}{Q} \cdot \frac{B D_2}{B D_1 D_2 + A N} = \epsilon_0 + \epsilon_1 x + \epsilon_2 x^2 + \dots \quad (19.1.)$$

Hacemos la suposición de que  $D_2$  y  $Q$  no tienen raíces estables comunes. Tampoco  $D_1$  y  $D_2$  con  $L$ . Para que la secuencia del error se anule a partir de un determinado instante es necesario que  $\epsilon(x)$  sea un polinomio. Para que el tiempo sea mínimo es necesario que el grado de este polinomio sea mínimo.

Un polinomio puede escribirse de la forma

$$X = X^- X^+ \quad (19.2.)$$

$X^+$  comprende las raíces estables ( $|x_i| > 1$ )

$X^-$  comprende las raíces inestables ( $|x_i| < 1$ )

Suponemos  $L^-$ ,  $Q^- \equiv 1$  (19.3.)

es decir, entrada y perturbación son estables.

Hacemos

$$A = D_2^+ A' \quad (19.4.)$$

$$B = QLN^+ B' \quad (19.5.)$$

Sustituyendo (19.2.) a (19.5.) en (19.1.) nos queda:

$$\varepsilon = R \frac{QB'D_1 D_2^-}{QLB' D_1 D_2^- + A'N^-} - P \frac{LB'D_2^-}{QLB'D_2^- D_1 + A'N^-} = \frac{(RQD_1 - PL)D_2^- B'}{QLB' D_1 D_2^- + A'N^-} \quad (19.6.)$$

En la expresión (19.6.) nos falta por determinar  $A'$  y  $B'$ . Si hacemos

$$B' QLD_1 D_2^- + N^- A' \equiv (RQD_1 - PL)^+ \quad (19.7.)$$

la expresión (19.6.) se convierte en:

$$\varepsilon = (RQD_1 - PL)^- \cdot D_2^- B' \quad (19.8.)$$

que es un polinomio, lo cual corresponde a un tiempo finito de respuesta. Hay infinitos polinomios  $A'$  y  $B'$  que satisfacen la identidad (19.7.) pero sólo hay una solución que haga mínimo el grado del polinomio  $\varepsilon$  de (19.8.): es el polinomio  $B'$  de grado mínimo que satisface (19.7.).

Una vez encontrados  $A$  y  $B$  es preciso comprobar que  $A/B$  es realizable.

Ejemplo. - Sea el sistema de la fig. 37 excitado por una entrada  $[e_n] = [1]$ ,  $E(x) = \frac{1}{1-x}$ , el cual no está sujeto a perturbaciones ( $P = 0$ ,  $Q = 1$ ). Suponemos estables las raíces de  $N(x)$  y  $D(x)$ .

Aplicando (19.1.):

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{BD}{BD + AN}$$

Suponemos que  $D(x)$  no contiene  $(1-x)$ . Aplicando (19.4.) y (19.5.)

$$A = D \cdot A'$$

$$B = (1 - x) NB'$$

Entonces

$$\varepsilon(x) = \frac{B'}{(1 - x) B' + A'} \quad (19.9.)$$

Aplicando (19.7.):

$$(1 - x) B' + A' = 1$$

El polinomio  $B'$  de grado mínimo que satisface esta ecuación es una constante.

Por ejemplo  $B' = 1$ . Entonces  $A' = x$ . Sustituyendo en (19.9.):

$$\varepsilon(x) = \frac{B'}{(1 - x) B' + A'} = \frac{1}{1 - x + x} = 1 \quad (19.10)$$

$$[\varepsilon_n] = [1, 0, 0, 0, \dots]$$

El resultado expresado por (19.10.) es que el error se anula a partir del segundo instante.

Veamos qué hubiera pasado si la entrada en vez de  $[e_n] = 1$  hubiera sido  $[e_n] = [nT]$ ,  $E(x) = \frac{1}{1 - x} \cdot \frac{Tx}{1 - x}$ . Conservando el sistema  $A/B$  encontrado, tendríamos

$$\varepsilon(x) = \frac{Tx}{1 - x} = T[x + x^2 + x^3 + \dots]$$

Es decir, para la entrada  $[e_n] = [nT]$  el mismo sistema que antes anulaba el error en un tiempo finito, produce ahora un error permanente. En otras palabras, falta una integración. Repetiendo el proceso de síntesis:

$$\varepsilon(x) = \frac{Tx}{(1 - x)^2} \cdot \frac{BD}{BD + AN}$$

$$B = (1 - x)^2 NB'$$

$$A = D \cdot A'$$

$$\varepsilon(x) = \frac{B' T x}{(1 - x)^2 B' + A'}$$

$$B' = 1$$

$$A' = 2x - x^2$$

$$\varepsilon(x) = Tx \longrightarrow [\varepsilon_n] = [0, T, 0, 0, \dots]$$

## 20. - Síntesis por el método de los polos dominantes.

Este apartado lo traducimos casi literalmente del libro citado de Sevely, el cual lo toma a su vez de un artículo de Zdan en 1.961 Digital Computer for Stabilizing Control Systems Convention.

Polos dominantes son aquellos que por estar más cerca de la zona de inestabilidad y por la magnitud de su residuo priman sobre todos los demás y determinan en un gran porcentaje el comportamiento del sistema.

Aquí se expone un método interesante que consiste en hacer la síntesis de un corrector numérico tal que la transmitancia en bucle cerrado del sistema  $S(z)/E(z)$  tenga la expresión más sencilla satisfaciendo a las especificaciones.

Para ello, después de haber escogido un período de muestreo compatible con las constantes de tiempo (Shannon) y con las posibilidades del calculador, se fija un coeficiente de amortiguamiento susceptible de asegurar un regimen transitorio satisfactorio (p. ej.  $\xi = 0,7$ ). Esto es lo mismo que fijar un par de polos dominantes para  $K(z) = S(z)/E(z)$ . Se pide a los ceros y polos de  $D(z)$  que anulen los polos y los ceros estables de  $G(z)$ . (Para evitar confusiones fijarse en la notación empleada en la figura 38, que no es homogénea con lo anterior).

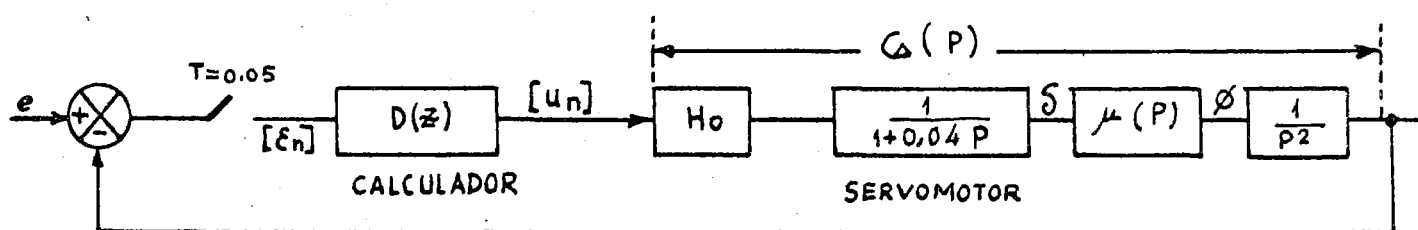


Fig. 38.

Además  $D(z)$  deberá contener un factor de la forma  $1 + A_1 z^{-1} / 1 + B_1 z^{-1}$  tal que las raíces de  $1 + D(z) \cdot G(z) = 0$  comporten el par de polos dominantes que nos hemos fijado más, eventualmente, otros polos que se tratará de que sean secundarios ( $|z| < 0,1$ ). Por último

$D(z)$  deberá poseer tantos polos en  $z = 1$  como sea necesario para anular los errores de posición, velocidad, aceleración;..... (ver en apartado 15 las sucesivas entradas-tipo) en régimen permanente, así como una ganancia ajustable  $K_d$ .

En el dibujo  $\mu(p)$  es la transmitancia entre el timón y la aceleración angular. Suponemos  $\mu(p) = \mu_{\text{constante}}$ .

$$G(p) = H_o(p) \frac{\mu}{p^2 (1 + 0,04p)} = \mu \frac{1 - e^{-0,05p}}{p^3 (1 + 0,04p)} \quad (20.1.)$$

Se calcula:

$$G(z) = 3,92 \cdot 10^{-4} \mu \frac{z^{-1} (1 + 2,78 z^{-1})(1 + 0,2 z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2 (1 - 0,286 z^{-1})} \quad (20.2.)$$

El lugar de raíces del sistema, si  $D(z)$  fuera una simple ganancia  $K_d$ , sería el representado en la fig. 39.

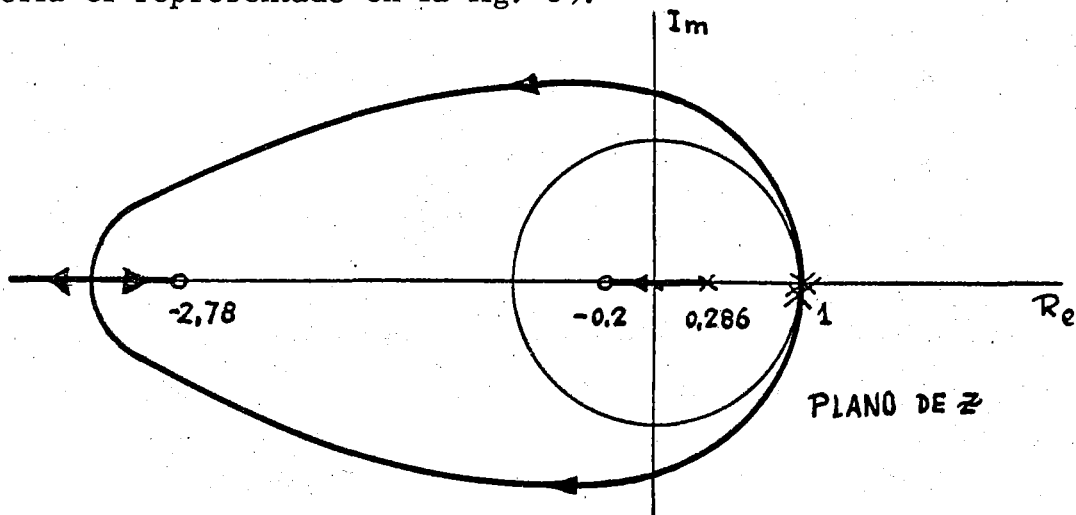


Fig. 39.

El sistema es siempre inestable. Se desea corregirlo de forma que satisfaga a las siguientes especificaciones:

- 1º.- Error permanente nulo en respuesta a entradas en escalón de posición y de velocidad (1 y t a partir de  $t = 0$ ).
- 2º.- Frecuencia propia amortiguada del sistema = 1 Hz.
- 3º.- Coeficiente de amortiguamiento  $\xi = 0,7$

(se recuerda que en un sistema continuo analógico de ecuación característica  $y'' + 2\xi\omega_n y' + \omega_n^2 y = 0$ , la pulsación propia amortiguada es  $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ )

### Cálculo de $D(z)$ .

Por el análisis hecho al principio de este apartado vemos que  $D(z)$  debe ser de la forma

$$D(z) = K_d \cdot \frac{(1 - 0,286 z^{-1})(1 + A_1 z^{-1})}{(1 + 0,2 z^{-1})(1 + B_1 z^{-1})} \quad (20.3.)$$

$D(z)$  no necesita tener polos en  $z = 1$  porque  $G(z)$  lleva ya los dos necesarios para anular el error en respuesta a una entrada en velocidad. La transmitancia en bucle abierto queda:

$$D(z) \cdot G(z) = K \frac{z^{-1} (1 + 2,78 z^{-1})(1 + A_1 z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2 (1 + B_1 z^{-1})} \quad (20.4.)$$

donde  $K = K_d \cdot 3,92 \cdot 10^{-4} \cdot \mu$ .

y la ecuación característica

$$1 + D(z) \cdot G(z) = 1 + (K + B_1 - 2) z^{-1} + (1 + 2,78 K - 2 B_1 + K A_1) z^{-2} + (B_1 + 2,78 K A_1) z^{-3} \quad (20.5.)$$

Cálculo de las raíces  $z_1$  y  $\bar{z}_1$  correspondientes a los polos dominantes.

$$\text{Tenemos } \omega_p = 2\pi \cdot f_p = 2\pi$$

$$\xi = \sin \Psi = 0,7$$

$$\alpha = \xi \omega_n = \omega_p = 2\pi \text{ porque } \Psi = 45^\circ$$

$$|z| = e^{-\alpha T} = e^{-0,05 \cdot 2\pi} = 0,731$$

$$\text{Arg } z = \omega T = 2\pi \cdot 0,05 \text{ correspondiente a } 18^\circ$$

$$\text{por lo que } z_1 = 0,731 \angle 18^\circ = 0,696 + j 0,225$$

$$\bar{z}_1 = 0,731 \angle -18^\circ = 0,696 - j 0,225$$

Si se toma por valor de la tercera raíz de (20.5.)  $z_3 = 0,1$  por

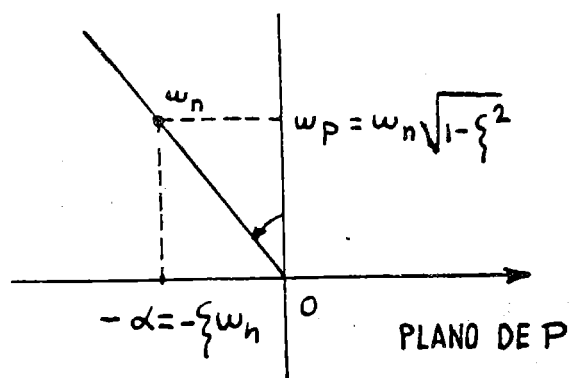


Fig. 40.

ejemplo, se tiene que identificar

$$(1 - z_1 z^{-1})(1 - \bar{z}_1 z^{-1})(1 - z_3 z^{-1}) = 1 + (K + B_1 - 2)z^{-1} + \dots$$

de donde se deducen

$$A_1 = -0,81$$

$$B_1 = 0,737 \quad (20.6.)$$

$$K = 0,173$$

y  $D(z)$  queda así:

$$D(z) = \frac{0,173}{K_{Go}} \cdot \frac{(1 - 0,286 z^{-1})(1 - 0,81 z^{-1})}{(1 + 0,2 z^{-1})(1 + 0,337 z^{-1})} \quad (20.7.)$$

$K_{Go}$  es la ganancia correspondiente a  $G(z)$  para un determinado valor de la masa del ingenio (la fig. 38 corresponde a la estabilización de un ingenio espacial). A medida que se consume el combustible disminuye el momento de inercia y  $K_G$  crece.

La transmitancia en  $z$  en bucle abierto es

$$D(z) \cdot G(z) = 0,173 \frac{K_G}{K_{Go}} \cdot \frac{z^{-1}(1 + 2,78z^{-1})(1 - 0,81 z^{-1})}{(1 - z^{-1})^2(1 + 0,337 z^{-1})} \quad (20.8.)$$

La fig. 41 representa el lugar de las raíces del sistema corregido.



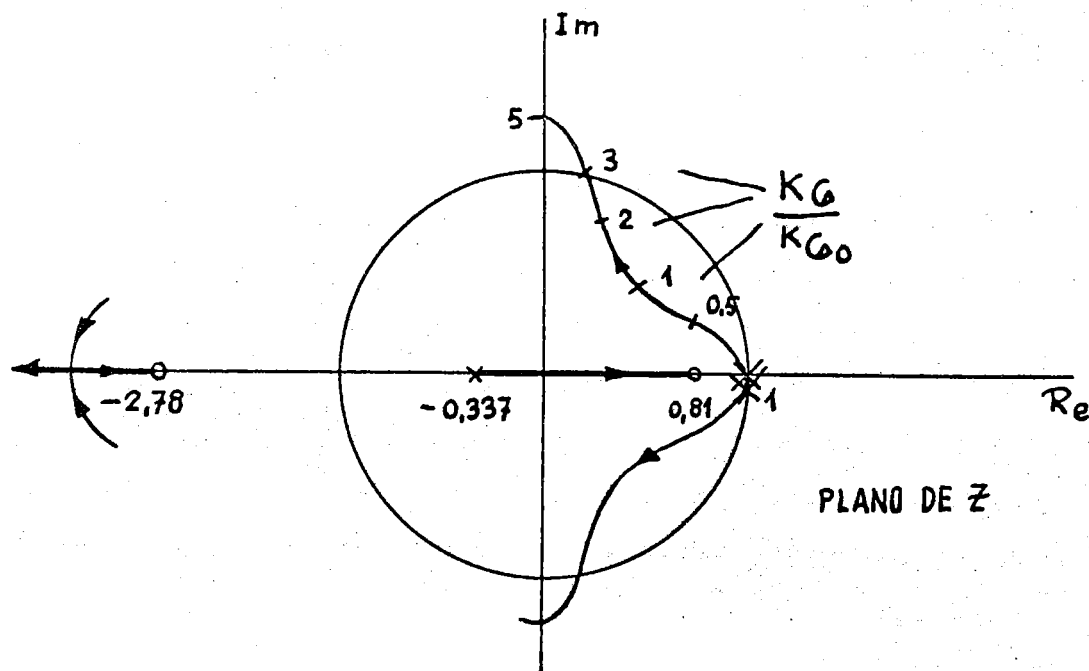


Fig. 41.

El margen de ganancia correspondiente a  $K_{Go}$  es del orden de 3. -  
El margen de fase del orden de  $40^\circ$ . (No se olvide que, en el caso de la -  
fig. 38., la salida del proceso es continua).

La ecuación recurrente que traduce el comportamiento del calcula -  
dor, deducida de  $D(z) = U(z)/\varepsilon(z)$  en (20.7.) es

$$u_n = \frac{0,173}{K_{Go}} [\varepsilon_n - 1,096 \varepsilon_{n-1} + 0,2316 \varepsilon_{n-2}] - 0,537 u_{n-1} - 0,0674 u_{n-2}$$

(20.9.)

## A N E X O I

### Ideas elementales sobre la organización de los calculadores numéricos.

#### 1. - Esquema funcional.

Un calculador numérico consta esquemáticamente de una unidad de cálculo donde se ejecutan las operaciones; una memoria para almacenamiento de la información; un órgano de entrada/salida, que consiste en general en uno o varios canales por donde transcorre la información proveniente o con destino a distintas unidades periféricas multiplexadas; y por último, lo que llamaremos, sin entrar en mas detalles, una unidad de gestión, que dispone en todo momento la utilización de las demás unidades.

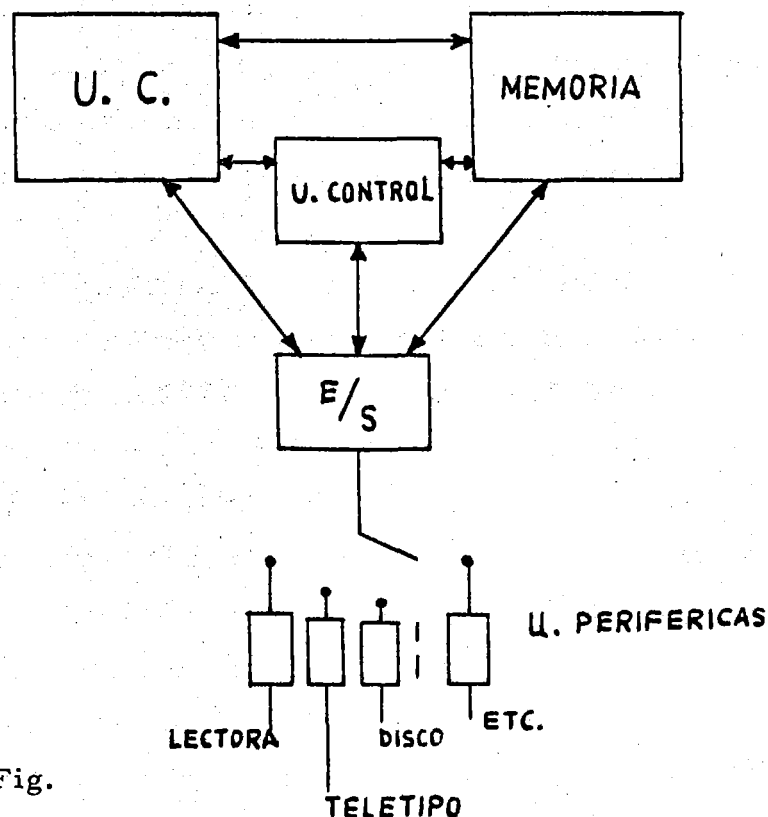


Fig.

La idea importante en nuestro contexto es que el ordenador ejecuta los cálculos de forma secuencial, es decir uno después de otro y que jamás puede hacer dos cálculos simultáneamente. En la memoria se almacenan las instrucciones (programa) y datos numéricos que, por intermedio de un vehículo externo (tarjetas perforadas, cinta u otros) se han introducido previamente. La unidad de control decide y organiza la ejecución de la primera instrucción del programa, que tiene lugar en U.C. Sólo una vez terminado este cálculo, cuyo resultado quedará almacenado en general en alguna posición de la memo-

ria o en un registro de U.C., la unidad de control organiza la ejecución de la segunda instrucción, y así sucesivamente.

Así, si se quiere calcular  $y = ax^2 + bx + c$  para valores conocidos de  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $x$ , la secuencia de cálculo podría ser:

$$1^{\circ} \quad y_1 = ax$$

$$2^{\circ} \quad y_2 = y_1 x$$

$$3^{\circ} \quad y_3 = bx$$

$$4^{\circ} \quad y_4 = y_2 + y_3$$

$$5^{\circ} \quad y_5 = y_4 + c = y$$

En control de proceso esto puede aparecer como un serio handicap en comparación con los sistemas analógicos, donde la información continua es tratada simultáneamente; en cuyo caso, sin embargo, cada sistema de mando supone un material que, por decirlo así, no sirve para otra tarea. Esto representa una gran falta de flexibilidad y en términos económicos puede resultar una mala inversión.

Debido a su funcionamiento secuencial es siempre el mismo calculador numérico el que ejecuta todas las operaciones. Para cambiar la tarea sólo hace falta cambiar el programa contenido en la memoria. Del mejor conocimiento del proceso por la experiencia se deriva siempre una mejora del programa, es decir, una elevación del rendimiento.

Actualmente los calculadores tienen un ciclo de lectura de alrededor de  $1 \mu s$ . Una operación puede ser efectuada en cualquier caso en menos de  $10 \mu s$ . Supóngase, p. ej. un missile de alcance de unos 30 Kms teleguiado (ordenes a cadencia de 10 por seg.) en persecución de objetivo. El período de muestreo es  $1/10$  seg., por lo que si suponemos  $10^{-5}$  seg. el tiempo de una operación elemental, el calculador puede efectuar  $10^4$  operaciones elementales entre dos instantes de muestreo.

Esta enorme velocidad de cálculo permite que un calculador pueda controlar varios procesos simples simultáneamente o lo que es lo mismo un proceso complejo. Lo que, unido a la considerable reducción de precio y de dimensiones, impone irreversiblemente el uso de ordenadores en control de todo tipo de procesos industriales y más generalmente en el control en tiempo real de sistemas cualesquiera.

## 2. - Calculadores en "tiempo real"

Se dice que un calculador trabaja en "tiempo real" cuando trata los datos a medida que éstos varían con el tiempo.

En relación con un ordenador universal o científico un ordenador para "tiempo real" tiene las siguientes diferencias especiales:

a).- Organos de entrada y salida importantes

Para control de procesos:

- codificadores o convertidores analógico-digitales; miden la magnitud física y la traducen en forma tratable por el ordenador (sucesión de dígitos binarios)
- decodificadores o convertidores dígito-analógicos; efectúan la operación inversa, a la salida del ordenador.

Resumiendo, un ordenador para control de procesos es, en cierto modo, un elemento híbrido.

b).- Sistema de tratamiento de interrupciones.

Una interrupción es una señal que, en el momento de presentarse a la entrada del ordenador, y después de ser convenientemente evaluada, puede interrumpir la ejecución del programa en curso y desencadenar la ejecución de otro programa almacenado en la memoria.

Imagínese una planta industrial, donde el sobrepasar una determinada temperatura en una instalación debe desencadenar un programa de ejecución de medidas de seguridad.

Otro ejemplo es un sistema de control por muestreo. El ordenador que controla el proceso efectúa en los tiempos sobrantes otras tareas (p. ej. la nómina del personal) pero, transcurrido el período  $T$  y coincidiendo con la señal enviada por un reloj, debe tratar una nueva cifra del proceso, que es su tarea principal.

Con esto hemos querido dar una idea del significado de las señales de interrupción. Naturalmente las cosas se complican mucho en los casos de procesos complejos, para los que hay que montar un complejo sistema de programación de tratamiento jerarquizado de las interrupciones previstas.

## A N E X O II

### El lugar de las raíces (lugar de Evans)

#### 1. - Estudio de los sistemas a partir de sus polos y ceros.

Existen dos técnicas para el estudio de las funciones de transferencia: el método armónico o frecuencial, que consiste en trabajar sobre los lugares de transferencia, y que suponemos conocido del lector, y el método de polos y ceros. Digamos unas palabras acerca del fundamento de la técnica de polos y ceros.

Consideremos un sistema lineal continuo cuya F.T. (Función de transferencia, o transmitancia) sea:

$$F(p) = k \frac{N(p)}{D(p)} = K \frac{1 + a_1 p + \dots + a_m p^m}{1 + b_1 p + \dots + b_n p^n} \quad (1.1.)$$

$K = F(0)$  es la ganancia estática.

Supondremos que, como es normal,  $m \leq n$ .

Si llamamos  $z_1, z_2, \dots, z_m$  a las raíces de  $N(p) = 0$  (ceros de  $F(p)$ ), y  $p_1, p_2, \dots, p_n$  a las de  $D(p) = 0$  (polos de  $F(p)$ ), (1.1.) se podrá escribir en la forma:

$$F(p) = k \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} = k \frac{\prod_{i=1}^m (p - z_i)}{\prod_{j=1}^n (p - p_j)} \quad (1.2.)$$

donde  $k$  es una constante sin significado físico relacionada con la ganancia estática  $K$  por:

$$K = k \frac{(-z_1)(-z_2) \dots (-z_m)}{(-p_1)(-p_2) \dots (-p_n)} = k \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_j)} \quad (1.3.)$$

Suponiendo que no hay polos de orden superior a la unidad, (1.2.) se podrá descomponer en la forma:

$$F(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \frac{A_2}{p - p_2} + \dots + \frac{A_n}{p - p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{p - p_i} \quad (1.4.)$$

Para una entrada impulsional (impulso de Dirac,  $E(p) = 1$ ), la respuesta será  $s(t) = \mathcal{L}^{-1} F(p) E(p) = \mathcal{L}^{-1} F(p)$ . A la vista de la expresión de

$F(p)$  dada por (1.4.), podemos decir que la respuesta impulsional tendrá:

- términos de la forma  $A_i e^{c_i t}$ , correspondientes a los polos reales  $p = c_i$
- términos de la forma  $A_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi)$ , correspondientes a los polos complejos conjugados  $p_i = \alpha_i \pm j \beta_i$ .

El sistema será estable si todos los  $c_i$  y los  $\alpha_i$  son negativos, pues de esta manera todas las exponenciales serán decrecientes, y todas las sinusoides amortiguadas. Si hay algún  $c_i$  o algún  $\alpha_i$  positivo, el sistema será inestable.

Esto equivale a decir que la condición de estabilidad es que todos los polos de la F.T. del sistema tengan parte real negativa, es decir, que están situados en el semiplano de la izquierda del eje imaginario.

En el caso de que la F.T. tuviera un polo múltiple de orden  $q$ , aparecerían en la respuesta impulsional términos de la forma:  $A_{i1} t^{q-1} e^{c_i t} + A_{i2} t^{q-2} e^{c_i t} + \dots$ ; todos ellos tienden a cero para  $t \rightarrow \infty$  si  $c_i < 0$ , por lo que la condición de estabilidad sigue siendo la anteriormente enunciada.

Los polos determinan, pues, la estabilidad del sistema. Sin embargo, no bastan para caracterizar totalmente al sistema: su comportamiento depende también de los residuos o coeficientes de las exponenciales ( $A_i$ ), que están relacionados con los ceros.

En cuanto a los sistemas muestreados, la condición de estabilidad es que todos los polos de la F.T. en  $z$  estén dentro del círculo de radio unidad en el plano de la variable compleja  $z$ .

Así, pues, tanto en los sistemas continuos como en los muestreados, la situación de los polos y los ceros en el plano complejo caracteriza al sistema.

En el estudio de servosistemas, el método armónico o frecuencial conduce a las técnicas de Nyquist y de Black; el de polos y ceros da origen a la técnica del lugar de Evans.

Por otra parte, ambos métodos son teóricamente equivalentes desde el punto de vista de la teoría de funciones analíticas: el método armónico consiste en caracterizar, según el teorema de Cauchy, la función analítica  $F(p)$  por los valores que toma cuando  $p$  describe una curva cerrada en el plano complejo (el eje imaginario, cerrándose en el infinito); el método de polos y

ceros consiste en caracterizar, según el teorema de Liouville,  $F(p)$  por sus puntos singulares y los correspondientes residuos. En el caso de las funciones de transferencia normales, que son funciones analíticas muy simples, ambos métodos de estudiar  $F(p)$  son matemáticamente equivalentes.

El método armónico tiene la ventaja de apoyarse en el concepto físico de respuesta a frecuencias, por lo que puede aplicarse a sistemas cuyo modelo matemático se desconoce, mediante ensayos experimentales. El método de polos y ceros (y, por tanto, la técnica del lugar de Evans para servosistemas), sólo puede aplicarse cuando se conoce el modelo matemático del sistema.

En los servosistemas de muestreo siempre se conoce el modelo matemático. En ellos resulta de gran dificultad la extensión de los métodos armónicos. Además, en un sistema de control numérico es fácil situar los polos y los ceros donde más convenga. Por estas razones, en tales sistemas siempre se utiliza el lugar de Evans.

## 2. - El lugar de Evans.

Consideremos ya el caso de un servosistema lineal, en general con bucle no unitario (fig. 1).

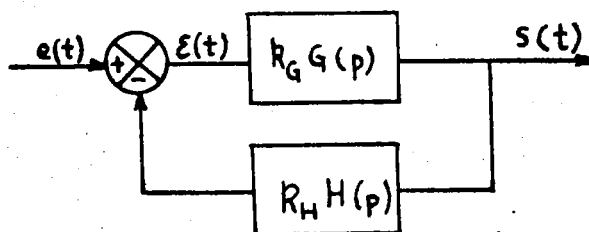


Fig. 1.

Si  $k_G G(p)$  es la función transferencia en bucle abierto (F.T.B.A.), y  $K_H H(p)$  es la F.T. del bucle, la función de transferencia en bucle cerrado (F.T.B.C.) será:

$$F(p) = \frac{K_G G(p)}{1 + K_G K_H G(p) H(p)} \quad (2.1.)$$

La estabilidad del sistema vendrá determinada por la posición de los polos de  $F(p)$ . Pero los polos de  $F(p)$  no son sino las raíces de

$$1 + kG(p) H(p) = 0 \quad (2.2.)$$

llamada ecuación característica del servosistema. Para abreviar, hemos he-

cho  $k_G k_H = k$  (\*).

$G(p)$  y  $H(p)$  serán, en general, fracciones racionales en  $p$ , con grado del denominador mayor o igual al del numerador

$$G(p) = \frac{N_G(p)}{D_G(p)} ; \quad H(p) = \frac{N_H(p)}{D_H(p)} , \quad (2.3.)$$

y (2.2.) se podrá escribir:

$$D_G(p) D_H(p) + k N_G(p) N_H(p) = 0 \quad (2.4.)$$

El grado de esta ecuación dependerá de  $D_G(p)$  y  $D_H(p)$ . Si llamamos  $n = n_G + n_H$  a dicho grado, la ecuación tendrá  $n$  raíces, que serán los  $n$  polos de  $F(p)$ . La posición de estos polos dependerá del valor de  $k$ , pudiendo así ocurrir que el sistema sea estable para determinados valores de  $k$  e inestable para otros.

Cuando  $k$  varía de cero a infinito, los  $n$  polos de F.T.B.C. (raíces de (2.2.) ó (2.4.)) se mueven sobre el plano complejo describiendo un lugar geométrico de  $n$  ramas. Este lugar geométrico recibe el nombre de lugar de raíces o lugar de Evans.

Cada punto de cada una de las  $n$  ramas del lugar de Evans corresponderá a un valor determinado de  $k$ , por lo que el lugar de Evans podrá graduarse en valores de  $k$ , y deducir de él para qué valores de  $k$   $F(p)$  tiene algún polo situado a la derecha del eje imaginario, siendo inestable, y para qué valores de  $k$  todos los polos de  $F(p)$  están en el semiplano de la izquierda, siendo el sistema estable.

Además, el lugar de Evans contiene también los ceros de  $F(p)$ , por lo que nos da toda la información sobre el sistema. Para ver que efectivamente es así, sustituyamos en (2.1.)  $G(p) = N_G/D_G$ , y  $H(p) = N_H/D_H$ :

-----  
(\* ) Obsérvese que  $k_G$  y  $k_H$  son las constantes sin significado físico de que hablábamos en el apartado anterior. Sus relaciones con las respectivas ganancias estáticas  $K_G$  y  $K_H$  vendrán dadas por (1.3.).



$$F(p) = \frac{k_G \frac{N_G}{D_G}}{1 + k \frac{N_G}{D_G} \frac{N_H}{D_H}} = \frac{k_G N_G D_H}{D_G D_H + k N_G N_H}$$

Esta expresión nos indica que los ceros de  $F(p)$  coinciden con las raíces de  $N_G(p) = 0$  y  $D_H(p) = 0$  (es decir, con los ceros de la F.T.B.A., y con los polos de la F.T. del bucle). Ahora bien, si atendemos a la ecuación característica en su forma (2.4.), vemos que todas las raíces de  $N_G = 0$  coinciden con algunas de las raíces de (2.4.) para el valor de  $k = \infty$ ; análogamente, todas las raíces de  $D_H = 0$  están comprendidas entre las que tiene (2.4.) para el valor  $k = 0$ . Luego, en definitiva, todos los ceros de  $F(p)$  están comprendidos en el lugar de Evans.

3. Ejemplo Consideremos el servosistema de posición angular con bucle unitario esquematizado en la figura 2.

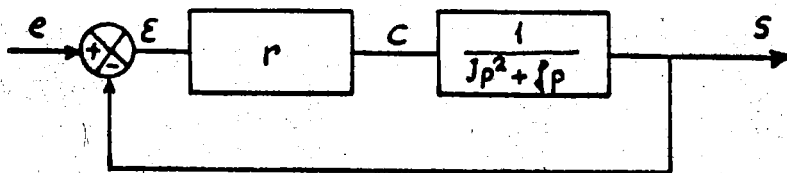


Fig. 2.

Un par de corrección proporcional al error,  $C(t) = r \varepsilon(t)$  se aplica al árbol de salida, caracterizado por una inercia,  $J$ , y un rozamiento viscoso,  $f$ . La ecuación diferencial del sistema será:

$$C = \varepsilon r = J \frac{d^2 s}{dt^2} + f \frac{ds}{dt}$$

y la F.T.B.A.:

$$kG(p) = \frac{S(p)}{\varepsilon(p)} = \frac{r}{Jp^2 + fp} = \frac{k}{p(p + \frac{1}{T})} \quad (3.1.)$$

habiendo hecho:

$$T = \frac{J}{f} ; \quad k = \frac{r}{J} \quad (3.2.)$$

La F.T.B.C. (bucle unitario,  $k_H H(p) = 1$ ), será:

$$F(p) = \frac{kG(p)}{1 + k G(p)} = \frac{k}{p^2 + \frac{p}{T} + k} \quad (3.3.)$$

Se trata, pues, de un sistema de segundo orden, con dos polos y sin ceros.

La ecuación característica es:

$$p^2 + \frac{p}{T} + k = 0 \quad (3.4.)$$

cuyas raíces,

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2T} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{T^2} - 4k} \quad (3.5.)$$

serán los polos de  $F(p)$ .

a) Si  $k < \frac{1}{4T^2}$ , los polos son reales. Para  $k = 0$ ,  $p_1 = 0$  y  $p_2 = -1/T$ . A medida que  $k$  aumenta,  $p_1$  y  $p_2$  se acercan, manteniéndose simétricos respecto al punto  $(-\frac{1}{2T}, 0)$ .

b) Cuando  $k = \frac{1}{4T^2}$ , los dos polos se confunden en un polo doble:  
 $p_{1,2} = -1/2T$ .

c) si  $k > 1/4T^2$  los polos son complejos conjugados:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2T} \pm j \frac{1}{2} \sqrt{4k - \frac{1}{T^2}}$$

con parte real  $-\frac{1}{2T}$ , independiente de  $k$ .

De acuerdo con estas consideraciones, el lugar de Evans es lo representado con trazo grueso en la figura 3.

Vemos que, siempre que  $k > 0$ ,  $\text{Re}[p_1] < 0$  y  $\text{Re}[p_2] < 0$ ; luego el sistema será estable para cualquier valor de  $k > 0$ . Para  $k = 0$ ,  $\text{Re}[p_1] = 0$ , y el sistema será oscilante.

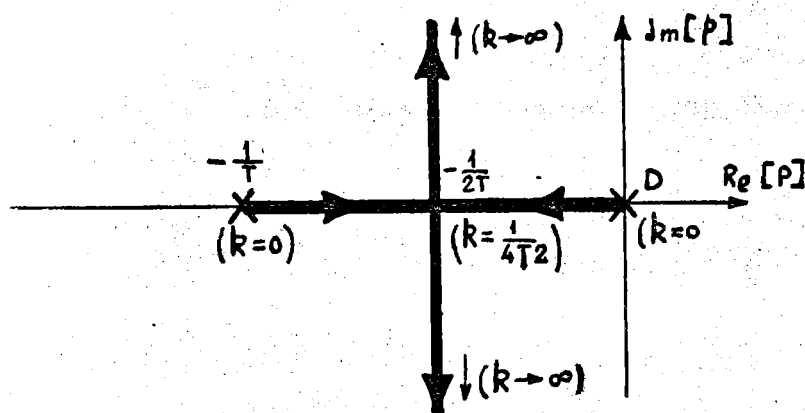


Fig. 3.

Podemos dar una significación más amplia a este ejemplo utilizando las variables reducidas  $\omega_n$  (pulsación propia no amortiguada) y  $\zeta$  (factor de amortiguamiento) (Ver Gille, 170) (\*), con lo que la F.T.B.C. (3.3.) se escribirá:

$$\bar{F}(p) = \frac{k}{p^2 + 2\zeta\omega_n p + \omega_n^2}$$

estando  $\omega_n$  y  $\zeta$  relacionadas con  $k$  y  $T$  por:

$$\omega_n = \sqrt{k} \quad ; \quad \zeta = \frac{1}{2T\sqrt{k}}$$

Podemos comprobar que:

- a) Los polos son reales siempre que  $\zeta > 1$ . Para valores de  $k$  muy pequeños,  $\zeta$  es muy grande.
- b) En el polo doble el amortiguamiento es crítico ( $\zeta = 1$ ).
- c) Cuando los polos son complejos,

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

(\*) Siempre que hagamos referencia a "Gille", debe entenderse que se trata del libro "Teoría y cálculo de los servosistemas", De Gille, Decaulne y Pelegrin, en su edición española (Paraninfo, 1.967).

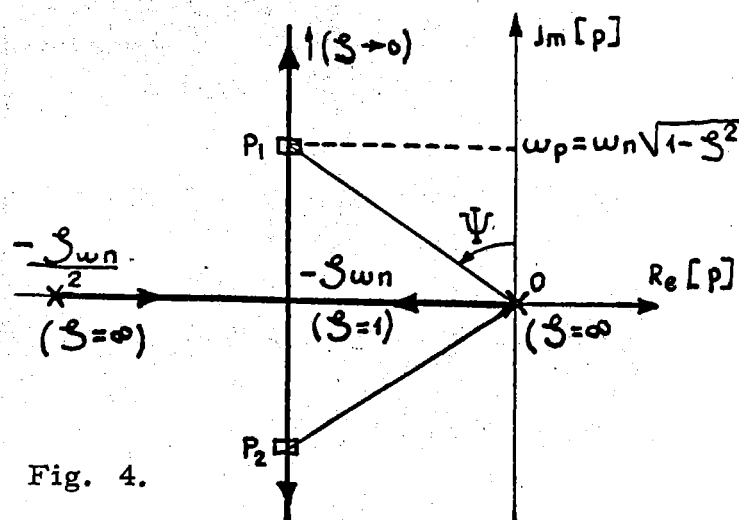


Fig. 4.

el amortiguamiento es inferior a la unidad.

Es interesante observar que, dada una posición de  $p_1$  y  $p_2$ ,  $\omega_n$  y  $\zeta$  quedan determinadas muy fácilmente. Supongamos que la situación de dichos polos es la representada con cuadrados (así suelen representarse los polos de la F.T.B.C., para distinguirlos de los de la F.T.B.A.) en la figura 4. Puede verse que se verifica:

$$OP_1 = OP_2 = \sqrt{(\zeta \omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2})^2} = \omega_n$$

$$\text{sen } \Psi = \frac{\zeta \omega_n}{\omega_n} = \zeta$$

La respuesta más rápida del sistema a un escalón se consigue para  $\zeta = 0,7$  lo cual corresponde  $\Psi = 45^\circ$ .

Si la parte imaginaria es muy grande,  $\zeta \rightarrow 0$  ( $\Psi \rightarrow 0$ ), el sistema está muy poco amortiguado, y tiende a comportarse como un sistema de segundo orden oscilante.

#### 4.- Condición de módulo y condición de fase.

En general, la ecuación característica es:

$$1 + kG(p) H(p) = 0, \quad (2.2.)$$

con  $k = k_G k_H$ . Escribamosla de esta otra forma

$$G(p) H(p) = - \frac{1}{k} \quad (4.1.)$$

$-\frac{1}{k}$  es un número real negativo, cuya fase será  $\pi$ , ó  $\pi + 2\lambda\pi$ , con  $\lambda$  entero. Descomponiendo (4.1.) en módulo y en fase, tendremos:

$$| G(p) H(p) | = \frac{1}{k} ; \arg [ G(p) H(p) ] = \pi + 2 \lambda \pi$$

o bien, si  $G(p)$  y  $H(p)$  se escriben según (2.3.),

$$\left[ \frac{N_G(p) N_H(p)}{D_G(p) D_H(p)} \right] = \frac{1}{k} \quad (4.2.)$$

$$\arg \left[ \frac{N_G(p) N_H(p)}{D_G(p) D_H(p)} \right] = \pi + 2 \lambda \pi \quad (4.3.)$$

Vamos a emplear la siguiente notación:

$m_G$  : número de ceros de  $G(p)$

$n_G$  : número de polos de  $G(p)$  ( $n_G \geq m_G$ )

$m_H$  : número de ceros de  $H(p)$

$n_H$  : número de polos de  $H(p)$  ( $n_H \geq m_H$ )

$m = m_G + m_H$  : número total de ceros del producto  $G(p) H(p)$

$n = n_G + n_H$  : número total de polos del producto  $G(p) H(p)$  ( $n \geq m$ )

$z_1, z_2, \dots, z_m$  : Ceros de  $G(p)$  ó de  $H(p)$  (ceros del producto  $G(p) H(p)$ )

$p_1, p_2, \dots, p_n$  : polos de  $G(p)$  ó de  $H(p)$  (polos del producto  $G(p) H(p)$ )

Entonces, (4.2.) y (4.3.) se podrán escribir, respectivamente:

$$\left| \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} \right| = \frac{1}{k} \quad (4.4.)$$

$$\arg(p - z_1) + \arg(p - z_2) + \dots - \arg(p - p_1) - \arg(p - p_2) - \dots = \pi + 2 \lambda \pi \quad (4.5.)$$

Todo punto que pertenezca al lugar de Evans deberá satisfacer estas ecuaciones, llamadas, respectivamente, condición de módulo y condición de fase.

(4.5.) es independiente de  $k$ , por lo que todo punto perteneciente al

lugar de Evans deberá satisfacerla. De este modo, podemos decir que la condición de fase nos sirve para trazar el lugar, y la de módulo para graduarlo en valores de  $k$ .

Geométricamente, si  $M$  es un punto del lugar de Evans, es decir, si es un polo de  $F(p)$  (F.T.B.C.) correspondiente a un determinado valor de  $k$ ,  $k = k_1$ , deberá ser:

$$\frac{|\vec{z_1 M}| |\vec{z_2 M}| \dots}{|\vec{p_1 M}| |\vec{p_2 M}| \dots} = \frac{1}{k_1}$$

$$\arg \vec{z_1 M} + \arg \vec{z_2 M} + \dots - \arg \vec{p_1 M} - \arg \vec{p_2 M} - \dots$$

$$\dots = \pi + 2\lambda\pi$$

(ver fig. 5.)

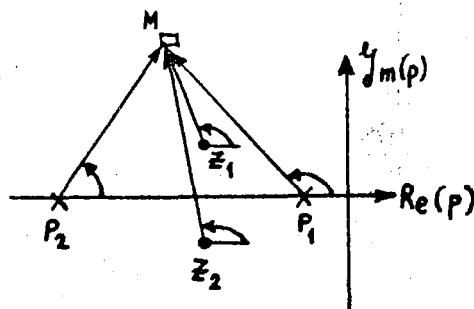


Fig. 5.

## 5. - Reglas geométricas de trazado aproximado del lugar de Evans.

Regla 1. - El lugar de Evans es simétrico respecto al eje real; puntos o segmentos del eje real pueden constituir parte del lugar.

Esto se deduce inmediatamente al considerar que las raíces de la ecuación característica son números reales o complejos conjugados.

Regla 2. - El lugar de Evans tiene  $n$  ramas.

En efecto, recordemos que la ecuación característica se puede escribir:

$$D_G(p) D_H(p) + k N_G(p) N_H(p) = 0 \quad (2.3.)$$

El grado de  $D_G(p) D_H(p)$  es  $n_G + n_H = n$ ; el de  $N_G(p) N_H(p)$  es  $m_G + m_H = m$ ; al suponer  $n \geq m$ , (2.3.) tendrá  $n$  raíces que, al variar  $k$ , se moverán en el plano complejo, describiendo  $n$  ramas.

**Regla 3.-** Los puntos de partida de las n ramas son los n polos de  $G(p) H(p)$ .

En efecto, las ramas partirán de los puntos correspondientes a  $k = 0$ . Pero, según (2.3.), estos puntos son las raíces de  $D_G(p) D_H(p) = 0$ , es decir, los polos de  $G(p) H(p)$ .

**Regla 4.-** Los puntos de llegada (puntos del lugar de Evans correspondientes a  $k = \infty$ ) son los m ceros de  $G(p) H(p)$ . Las n-m ramas restantes tienden al infinito según n-m direcciones asintóticas.

En efecto, cuando  $k \rightarrow \infty$ , la ecuación característica (2.3.) queda:

$$N_G(p) N_H(p) = 0$$

cuyas raíces son los m ceros de  $G(p) H(p)$ .

**Regla 5.-** Asíntotas.

Las n-m asíntotas vienen dadas por las ecuaciones:

$$\arg \left( p - \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \right) = \frac{\pi + 2\lambda\pi}{m - n} ; (\lambda = 0, 1, \dots, m-n-1)$$

(5.1.)

Es decir, todas ellas cortan al eje real en un punto de abscisa

$$\beta = \frac{(p_1 + p_2 + \dots) - (z_1 + z_2 + \dots)}{n - m}$$

(5.2.)

y las direcciones asintóticas son:

$$(\theta_X, \theta_\Delta) = \frac{\pi + 2\lambda\pi}{m - n}$$

(5.3.)

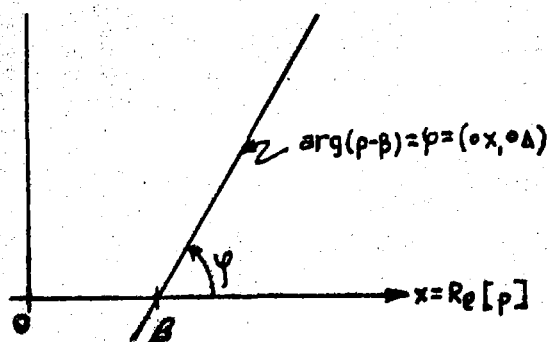


Fig. 6.

Para demostrarlo, vamos a ver que el lugar de Evans, que está determinado por la condición de fase:

$$\arg [G(p) H(p)] = \pi + 2\lambda \pi. \quad (5.4.)$$

se comporta, cuando  $p$  tiende a infinito, como una de las rectas (5.1.). Es decir, habrá que demostrar que:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [\arg G(p) H(p)] = (m - n) \arg \left( p - \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \right) \quad (5.5.)$$

Expresemos  $G(p) H(p)$  en función de sus polos y ceros; desarrolle mos los productos, y dividamos denominador entre numerador:

$$\begin{aligned} G(p) H(p) &= \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)} = \frac{p^m - p^{m-1} \sum_{i=1}^m z_i + \dots}{p^n - p^{n-1} \sum_{j=1}^n p_j + \dots} = \\ &= \frac{1}{p^{n-m} + \left( \sum_{i=1}^m z_i - \sum_{j=1}^n p_j \right) p^{n-m-1} + \dots} \end{aligned}$$

Si consideramos que, cuando  $p$  es muy grande, el denominador es tá suficientemente bien representado por las dos potencias de mayor exponente

$(p^{n-m} + \left( \sum_{i=1}^m z_i - \sum_{j=1}^n p_j \right) p^{n-m-1})$ , podemos sustituirlo por

$$\left( p - \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \right)^{n-m},$$

pues, en efecto, los dos primeros términos del desarrollo de este binomio son:

$$p^{n-m} - \left( \sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i \right) p^{n-m-1}$$

Entonces:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [G(p) H(p)] = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( p - \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \right)^{n-m}} = \lim_{p \rightarrow \infty} \left( p - \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \right)^{m-n}$$



Teniendo ahora en cuenta que  $\lim \arg u = \arg \lim u$ , y que  $\lim \arg (p - ) = \arg (p - )$ , podremos escribir:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \arg [G(p) H(p)] &= \lim_{p \rightarrow \infty} \arg \left( p - \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \right)^{m-n} = \\ &= (m - n) \lim_{p \rightarrow \infty} \arg \left( p - \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} \right) \end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado (5.5.).

#### Regla 6.- Ramas sobre el eje real.

La condición necesaria y suficiente para que un punto M del eje real pertenezca al lugar de Evans es que el número total de ceros y polos reales situados a la derecha de M sea un número impar.

En efecto, la condición necesaria y suficiente para que M pertenezca al lugar de Evans es que cumpla la condición de fase:

$$\arg \overrightarrow{z_1 M} + \arg \overrightarrow{z_2 M} + \dots - \arg \overrightarrow{p_1 M} - \arg \overrightarrow{p_2 M} - \dots = \pi(1 + 2\lambda)$$

Si M está sobre el eje real, los ceros o polos complejos conjugados no intervienen en la condición de fase, pues la suma de los argumentos de cada par es  $2\pi$ . Tampoco intervienen los situados a la izquierda de M, que dan argumento nulo. Sólo intervienen los que están a la derecha de M, sobre el eje real; cada uno de ellos da un argumento  $\pi$ .

Por consiguiente, la condición de fase  $\pi(n_{cD} - n_{pD}) = \pi(1 + 2\lambda)$  es decir:

$$n_{cD} - n_{pD} = 1 + 2\lambda$$

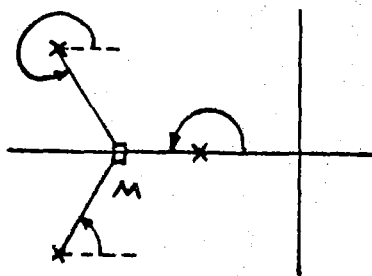


Fig. 7.

siendo  $n_{CD}$  el número de ceros a la derecha de  $M$ , y  $n_{PD}$  el de polos.

La condición para que  $M$  (real) pertenezca al lugar de Evans queda, pues, reducida a que  $n_{CD} - n_{PD}$  sea impar, o, lo que es lo mismo, a que lo sea  $n_{CD} + n_{PD}$ .

### Regla 7.- Puntos de separación del eje real.

Son aquellos en que dos polos reales de la F.T.B.C. se confunden en uno solo, para un valor crítico de  $k$ ,  $k = k(\alpha)$ , separándose y constituyendo un modo oscilatorio para  $k > k(\alpha)$  (si el punto está entre dos polos de  $G(p) H(p)$ , o para  $k < k(\alpha)$  (si está entre dos ceros) (fig. 8.).

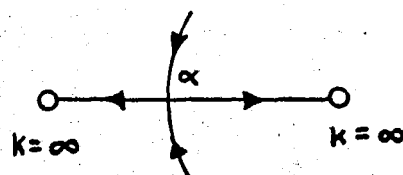
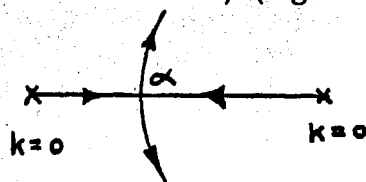


Fig. 8.

Puede calcularse la posición de estos puntos por la fórmula:

$$\frac{1}{\alpha - z_1} + \frac{1}{\alpha - z_2} + \dots = \frac{1}{\alpha - p_1} + \frac{1}{\alpha - p_2} + \dots \quad (5.6.)$$

ecuación de grado  $m(n - 1)$  en  $\alpha$ , que, en general, habrá de resolverse por tanteo.

**Demostración:**

La ecuación característica para  $p = \sigma$  (real) es:

$$1 + kG(\sigma) H(\sigma) = 0$$

o bien:

$$k = - \frac{1}{G(\sigma) \cdot H(\sigma)} = - \frac{D_G(\sigma) \cdot D_H(\sigma)}{N_G(\sigma) \cdot N_H(\sigma)} \quad (5.7.)$$

Es decir, puede considerarse  $k$  como una función racional de  $\sigma$ ,  $k = f(\sigma)$ . Los intervalos de  $\sigma$  para los cuales esta función tiene existencia están determinados por la regla 6. Dado un intervalo donde exista  $k = f(\sigma)$  (es decir, una rama del lugar de Evans sobre el eje real), para cada valor de  $k$  habrá un valor de  $\sigma$  (si el intervalo está comprendido entre un cero y un

polo), o dos valores de  $\sigma$  (si el intervalo está comprendido entre dos ceros o dos polos) que satisfagan (5.7.), es decir, que sean raíces reales de la ecuación característica. En el segundo de los casos, si para un determinado valor de  $k$  dos de estas raíces se confunden en una sola,  $\sigma = \alpha$ , este valor de  $k$  deberá ser un máximo o un mínimo en el intervalo, por lo que:

$$\left. \frac{dk}{d\sigma} \right|_{\sigma=\alpha} = 0 \quad (5.8.)$$

Esta es la condición que nos conducirá a demostrar (5.6.).

Pero antes, aclaremos estas ideas con un ejemplo:

Supongamos una distribución de polos y ceros reales de  $G(p) \cdot H(p)$  como la dibujada:

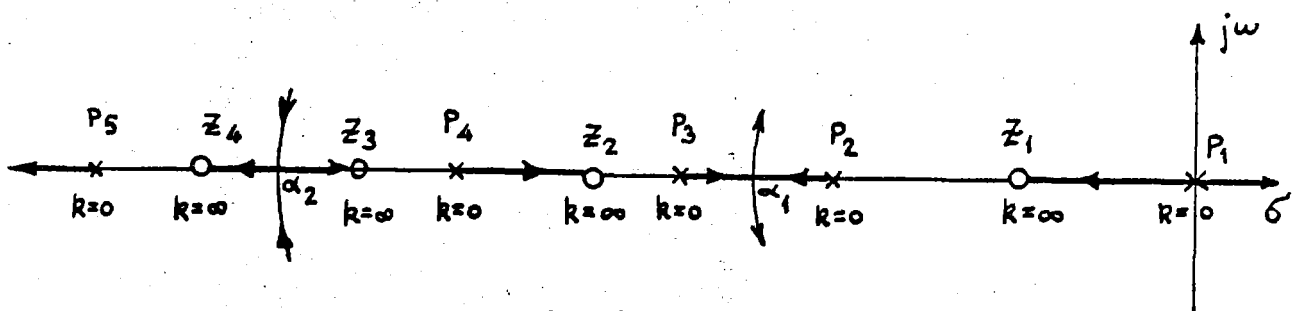


Fig. 9.

Según las reglas 3 y 4, los polos son puntos del lugar de Evans, correspondientes a  $k = 0$ ; los ceros corresponden a  $k = \infty$ . Según la regla 6, las ramas sobre el eje real son las dibujadas con trazo grueso. Las flechas indican el sentido en que se mueven los polos de la F.T.B.C. al variar  $k$  de cero a infinito.

Según la regla 3, para  $k = 0$ , el lugar de Evans debe partir de un polo de  $G(p) H(p)$ . Se comprende entonces que, entre  $z_3$  y  $z_4$  deba existir un punto de separación  $\alpha_2$ , de manera que para  $k < k(\alpha_2)$  los polos de la F.T.B.C. sean complejos conjugados, y para  $k > k(\alpha_2)$  sean reales.

Análogamente, según la regla 4, para  $k = \infty$  el lugar de Evans debe terminar en un cero de  $G(p) H(p)$  o en el infinito. Luego debe haber entre  $p_2$  y  $p_3$  otro punto de separación  $\alpha_1$  de manera que para  $k < k(\alpha_1)$  los polos de la F.T.B.C. que han salido de  $p_2$  y  $p_3$  sean reales, y para  $k > k(\alpha_1)$  sean complejos conjugados.

Conociendo los intervalos de existencia de (5.7.) para  $\sigma$  real, que son  $(p_1 z_1)$ ,  $(p_2 p_3)$ ,  $(p_2 z_2)$ ,  $(z_2 p_4)$ ,  $(z_3 z_4)$ ,  $(p_5 \infty)$ , y sabiendo los valores de  $k$  en los extremos de esos intervalos, podemos hacer una representación

gráfica aproximada de  $k = f(\sigma)$ . (ver figura 10).

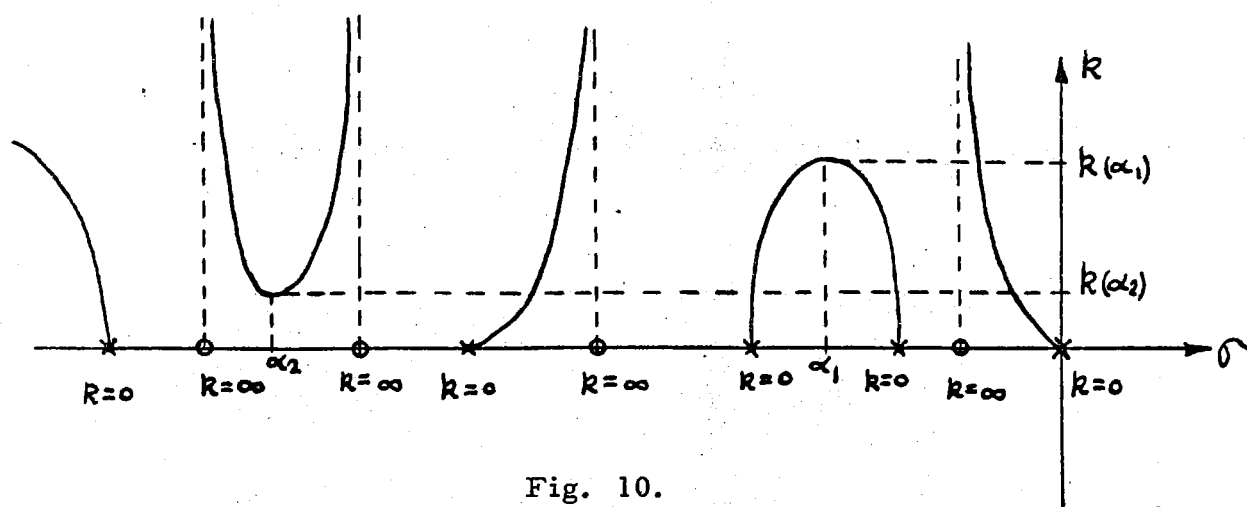


Fig. 10.

En ella se aprecia claramente que

$$\left. \frac{dk}{d\sigma} \right|_{\sigma = \alpha_1} = 0, \text{ y } \left. \frac{dk}{d\sigma} \right|_{\sigma = \alpha_2} = 0$$

Pues bien, veamos cómo la condición (5.8.) nos lleva a la ecuación en  $\alpha$  (5.6.).

Sustituyendo en (5.8.) el valor de  $k$  dado por (5.7.) y operando, resulta:

$$\left. \frac{N_G(\sigma) N_H(\sigma)}{D_G(\sigma) D_H(\sigma)} \frac{d}{d\sigma} \left[ \frac{D_G(\sigma) D_H(\sigma)}{N_G(\sigma) N_H(\sigma)} \right] \right|_{\sigma = \alpha} = 0$$

o, lo que es igual:

$$\left. \frac{\frac{d}{d\sigma} [N_G(\sigma) N_H(\sigma)]}{N_G(\sigma) N_H(\sigma)} \right|_{\sigma = \alpha} = \left. \frac{\frac{d}{d\sigma} [D_G(\sigma) D_H(\sigma)]}{D_G(\sigma) D_H(\sigma)} \right|_{\sigma = \alpha} \quad (5.9)$$

En la práctica, (5.9.) ya nos sirve para obtener la ecuación en  $\alpha$ ; basta sustituir  $N_G$ ,  $N_H$ ,  $D_G$ ,  $D_H$ . Pero vamos a desarrollar esta expresión -

para obtener (5.6.).

Tengamos en cuenta que:

$$\frac{\frac{d}{d\sigma} \left[ N_G(\sigma) N_H(\sigma) \right]}{N_G(\sigma) N_H(\sigma)} = \frac{d}{d\sigma} \ln \left[ N_G(\sigma) N_H(\sigma) \right],$$

y

$$\frac{\frac{d}{d\sigma} \left[ D_G(\sigma) D_H(\sigma) \right]}{D_G(\sigma) D_H(\sigma)} = \frac{d}{d\sigma} \ln \left[ D_G(\sigma) D_H(\sigma) \right]$$

y que

$$N_G(\sigma) N_H(\sigma) = (\sigma - z_1)(\sigma - z_2)\dots; \quad \ln \left[ N_G(\sigma) N_H(\sigma) \right] = \ln(\sigma - z_1) + \\ + \ln(\sigma - z_2) + \dots$$

$$D_G(\sigma) D_H(\sigma) = (\sigma - p_1)(\sigma - p_2)\dots; \quad \ln D_G(\sigma) D_H(\sigma) = \ln(\sigma - p_1) + \\ + \ln(\sigma - p_2) + \dots$$

Sustituyendo en (5.9.),

$$\frac{d}{d\sigma} \left[ \ln(\sigma - z_1) + \dots \right]_{\sigma=\alpha} = \frac{d}{d\sigma} \left[ \ln(\sigma - p_1) + \dots \right]_{\sigma=\alpha}$$

de donde se obtiene, finalmente, la ecuación (5.6.):

$$\frac{1}{\alpha - z_1} + \frac{1}{\alpha - z_2} + \dots = \frac{1}{\alpha - p_1} + \frac{1}{\alpha - p_2} + \dots$$

A título de indicación observamos que esta ecuación se puede obtener también aplicando la condición de fase a un punto de abscisa muy próximo al eje real.

#### Regla 8.- Intersecciones con el eje imaginario.

Interesa a veces averiguar si el lugar de Evans corta el eje imaginario, en qué puntos y para qué valores de k. Este problema se resuelve ha-

ciendo  $p = j\omega$  en la ecuación característica:

$$D_G(j\omega) D_H(j\omega) + kN_G(j\omega) N_H(j\omega) = 0,$$

ecuación en  $k$  y  $\omega$  que, descompuesta en parte real e imaginaria, da origen a dos:

$$\operatorname{Re} \left[ D_G(j\omega) D_H(j\omega) + kN_G(j\omega) N_H(j\omega) \right] = 0$$

$$\operatorname{Im} \left[ D_G(j\omega) D_H(j\omega) + kN_G(j\omega) N_H(j\omega) \right] = 0$$

Si estas ecuaciones son compatibles, hay corte con el eje imaginario, y se podrán obtener de ellas los posibles valores de  $k$  y  $\omega$ .

#### Regla 9.- Angulo de salida.

Llamaremos así al ángulo (medido respecto al eje real) con que el lugar sale de un polo  $p_k$ . Coincidirá con la pendiente de la tangente en este polo. Puede calcularse por la fórmula:

$$\varphi_{sal} = \pi + \sum_{i=1}^m \arg(p_k - z_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \arg(p_k - p_j) \quad (5.10.)$$

En efecto, expresemos la condición de fase para un punto infinitamente próximo a  $p_k$ :

$$\sum_{i=1}^m \arg(p_k - z_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \arg(p_k - p_j) - \lim_{p \rightarrow p_k} \arg(p - p_k) = \pi + 2\lambda\pi$$

$$\lim_{p \rightarrow p_k} \arg(p - p_k) = \varphi_{sal};$$

Sustituyendo y despejando  $\varphi_{sal}$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{sal} = & \sum_{i=1}^m \arg(p_k - z_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \arg(p_k - p_j) - \pi - 2\lambda\pi = \pi + \sum_{i=1}^m \arg(p_k - z_i) - \\ & - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \arg(p_k - p_j) \end{aligned}$$

para ( $\lambda = -1$ )

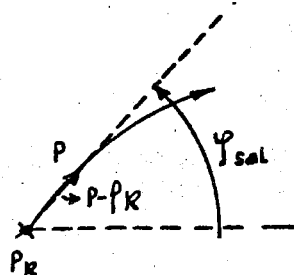


Fig. 11.

#### Regla 10.- Angulo de llegada.

Llamamos así al ángulo (también medido con relación al eje real) con que el lugar llega a un cero. Coincide con la pendiente en ese cero, y viene dado por:

$$\varphi_{\ell} = +\pi + \sum_{j=1}^n \arg(z_k - p_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m \arg(z_k - z_i) \quad (5.11.)$$

La demostración es análoga a la anterior.

#### Caso particular de bucle unitario.

Estas reglas se aplican al caso de que el bucle sea unitario sin más que tener en cuenta que  $k_H(p) = 1$ . Entonces,  $m$  representará el número de ceros de  $G(p)$  (puesto que  $m_H = 0$ ), y  $n$  el número de polos de  $G(p)$  (puesto que  $n_H = 0$ ), y como  $k_H = 1$ ,  $k = k_G$ .

### 6.- Ejemplos de trazado del lugar de Evans.

#### 6.1.- Servosistema de segundo orden con bucle no unitario.

Sea la F.T.B.A.:

$$k_G G(p) = \frac{k_G}{p(p+1)} \quad (6.11.)$$

y la F.T. del bucle:

$$k_H H(p) = \frac{k_H}{0,5 p + 1} \quad (6.12.)$$

La ecuación característica en la forma (2.4.) será:

$$p(p+1)(0,5 p + 1) + k = 0 \quad (k = k_G k_H) \quad (6.13.)$$

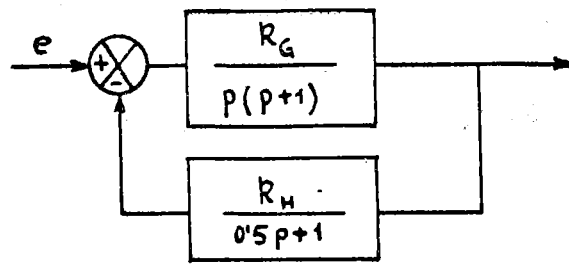


Fig. 12.

Apliquemos las reglas dadas anteriormente, teniendo en cuenta que:

$$n = n_G + n_H = 3 \quad ; \quad m = m_G + m_H = 0$$

Regla 2.- Número de ramas :  $n = 3$

Regla 3.- Puntos de partida: Polos de  $G(p)$  y  $H(p)$  ( $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -1$ ,  $p_3 = -2$ )

Regla 4.- Puntos de llegada: Ceros de  $G(p)$  y  $H(p)$  (no hay)  
Habrá  $n-m = 3$  direcciones asintóticas.

Regla 5.- Asíntotas:

$$\text{Direcciones: } (\text{Ox}, \text{O}\Delta) = \frac{\pi + 2\lambda\pi}{-3} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0; (\text{Ox}, \text{O}\Delta) = -\pi/3 \\ \lambda = 1; (\text{Ox}, \text{O}\Delta) = -\pi \\ \lambda = 2; (\text{Ox}, \text{O}\Delta) = -5\pi/3 \end{array} \right.$$

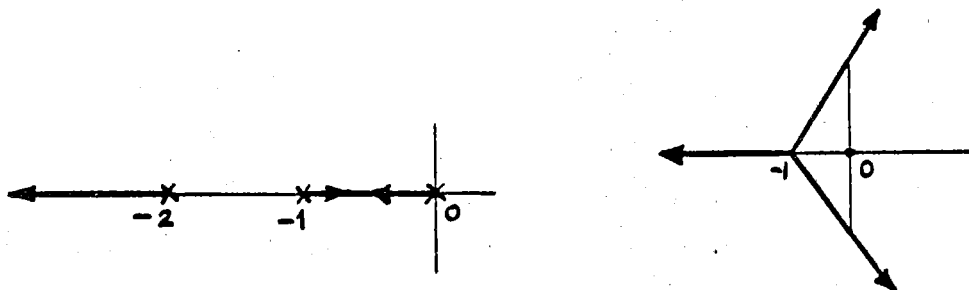


Fig. 13.

Intersección eje real:

$$\beta = \frac{-1 - 2}{3} = -1$$



Regla 6.- Ramas sobre el eje real:

Intervalos  $[0, -1]$  y  $[-2, \infty]$

Regla 7.- Puntos de separación del eje real. Se obtendrán resolviendo (5.6.) que, en nuestro caso, es:

$$0 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\alpha + 2}$$

Operando, obtenemos las dos raíces:  $\alpha_1 = -0,42$ ;  $\alpha_2 = -1,58$ . Ahora bien, de las dos, la segunda no tiene realidad física, ya que en ese punto no hay rama sobre el eje real (Correspondería a  $k < 0$ , ver 8.).

En el punto de separación  $\alpha_1 = -0,42$ ,  $k = 0,182$ .

Regla 8.- Intersección con el eje imaginario.

Haciendo  $p = j\omega$  en (6.2.3.):

$$j\omega(j\omega + 1)(0,5j\omega + 1) + k = 0$$

Desarrollando, y separando parte real e imaginaria, se obtienen las ecuaciones:

$$k + 1,5\omega^2 = 0$$

$$\omega - 0,5\omega^3 = 0$$

que, aparte la solución nula  $\omega = 0$ ,  $k = 0$ , tienen las soluciones:

$$\omega = +\sqrt{2}, k = 3; \omega = -\sqrt{2}, k = 3$$

De acuerdo con estos resultados, el lugar de Evans tendrá la forma dibujada en la figura 14.

Se puede hallar la ecuación de la curva que describen las dos ramas para  $k > 0,182$ . Basta para ello hacer  $p = \sigma + j\omega$  en la ecuación característica, separar parte real e imaginaria, y eliminar  $k$ . Se obtiene así la ecuación en coordenadas cartesianas:

$$3(\sigma + 1)^2 - \omega^2 - 1 = 0,$$

que representa una hipérbola, de la cual sólo aparece en el lugar de Evans la rama correspondiente a  $k > 0$ .

Para  $k < 3$  el sistema será estable. Para la ganancia crítica  $k = 3$

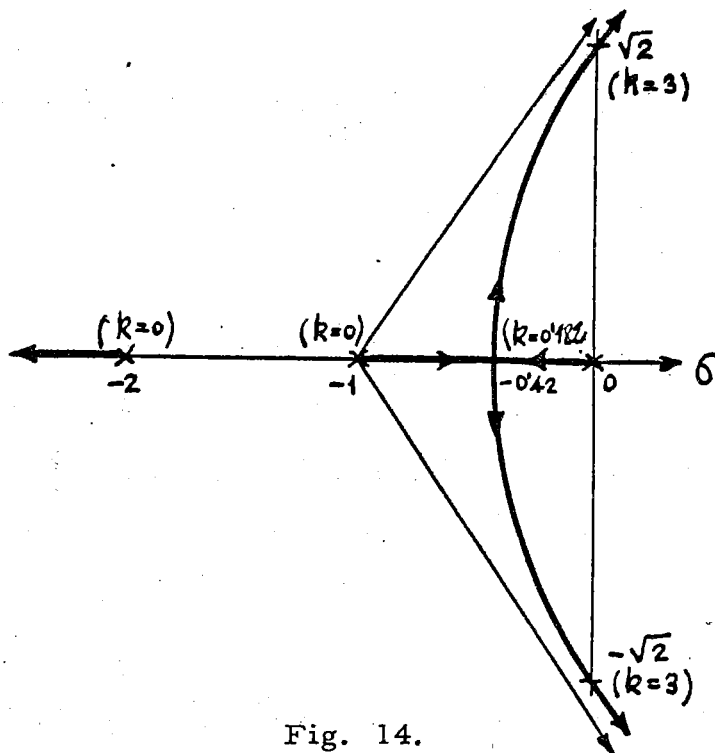


Fig. 14.

aparece un modo oscilatorio no amortiguado, y para  $k > 3$  el sistema es inestable. Los sistemas con este tipo de estabilidad se llaman sistemas regulares.

Obsérvese que, por lo que respecta a la estabilidad, este sistema es equivalente a otro de bucle unitario que tenga como F.T.B.A.:

$$\frac{k_G \cdot k_H}{p(p + 1)(0,5p + 1)}$$

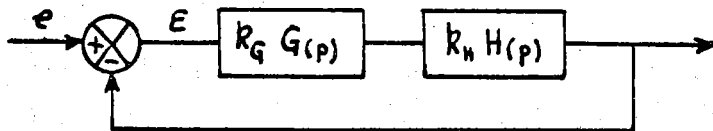


Fig. 15.

En efecto ambos tienen la misma ecuación característica (6.1.3.), y, por tanto, el mismo lugar de Evans. La diferencia, en el plano complejo, entre uno y otro radica en los ceros de la F.T.B.C. y por tanto en los residuos: mientras que en el sistema de bucle no unitario estos ceros coinciden con los ceros de  $G(p)$  y los polos de  $H(p)$ , en el bucle unitario coinciden con los ceros de  $G(p)$  y los ceros de  $H(p)$ . Es fácil de comprobar que en uno y otro caso las expresiones de la F.T.B.C. vienen dadas por (6.14.) y (6.15.)

$$F.T.B.C.N.U. = \frac{k_G N_G D_H}{D_G D_H + k_G k_H N_G N_H} \quad (6.14.)$$

$$F.T.B.C.U. = \frac{k_G k_H N_G N_H}{D_G D_H + k_G k_H N_G N_H} \quad (6.15.)$$

6.2.- Servosistema de tercer orden, con una integración, polos complejos y bucle unitario.

Sea la F.T.B.A.:

$$k G(p) = \frac{k}{p [(p+1)^2 + 4]} \quad (6.2.1.)$$

La ecuación característica será:

$$p [(p+1)^2 + 4] + k = 0 \quad (6.2.2.)$$

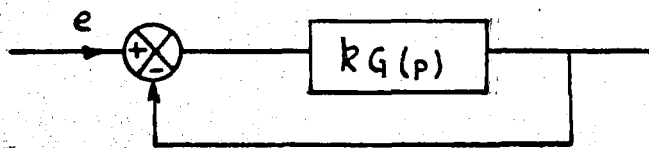


Fig. 16.

Regla 2.- Número de ramas:  $n = 3$

Regla 3.- Puntos de partida: polos de  $G(p)$  ( $p_1 = 0$ ,  $p_2 = -1 + 2j$ ,  $p_3 = -1 - 2j$ ).

Regla 4.- Puntos de llegada: ceros de  $G(p)$  (no hay)

$n - m = 3$  direcciones asintóticas.

Regla 5.- Asíntotas:

$$\text{Direcciones: } (Ox, O\Delta) = \frac{\pi + 2\lambda\pi}{m - n} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0; (Ox, O\Delta) = -\pi/3 \\ \lambda = 1; (Ox, O\Delta) = -\pi \\ \lambda = 2; (Ox, O\Delta) = -5\pi/3 \end{array} \right.$$

Intersecciones eje real:

$$\beta = \frac{0 - 1 + 2j - 1 - 2j}{3} = -\frac{2}{3} = -0,66$$

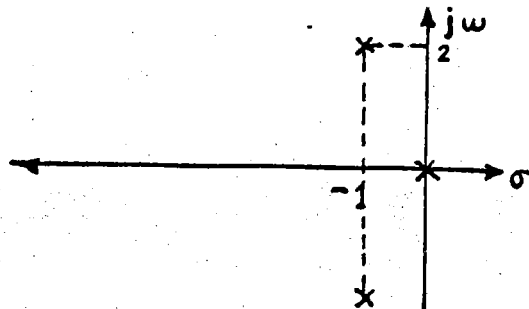


Fig. 17.

Regla 6.- Ramas sobre el eje real:

Intervalo  $[0, -\infty]$

Regla 7.- Puntos de separación del eje real:

Vendrían dados por las raíces reales de

$$0 = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha+1-2j} + \frac{1}{\alpha+1+2j}$$

que como se puede comprobar, no hay.

Regla 8.- Intersecciones con el eje imaginario.

Se obtienen haciendo  $p = j\omega$  en (6.2.2.), y separando parte real e imaginaria. Las soluciones son:  $k = 10$ ,  $\omega = \pm \sqrt{5}$ .

Regla 9.- Angulos de salida, de  $p_2$  y  $p_3$ :

Aplicando la fórmula (5.10) al polo  $p_2$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{sal} &= \pi - \arg(p_2 - p_1) - \arg(p_2 - p_3) = \\ &= \pi - \left( \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{1}{2} \right) - \frac{\pi}{2} = -\arctg \frac{1}{2} \approx -26,6^\circ \end{aligned}$$

Análogamente, para el  $p_3$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{sal} &= \pi - \arg(p_3 - p_1) - \arg(p_3 - p_2) = \pi - \left( \frac{3\pi}{2} - \arctg \frac{1}{2} \right) - \frac{3\pi}{2} = \\ &= \arctg \frac{1}{2} \approx 26,6^\circ \end{aligned}$$

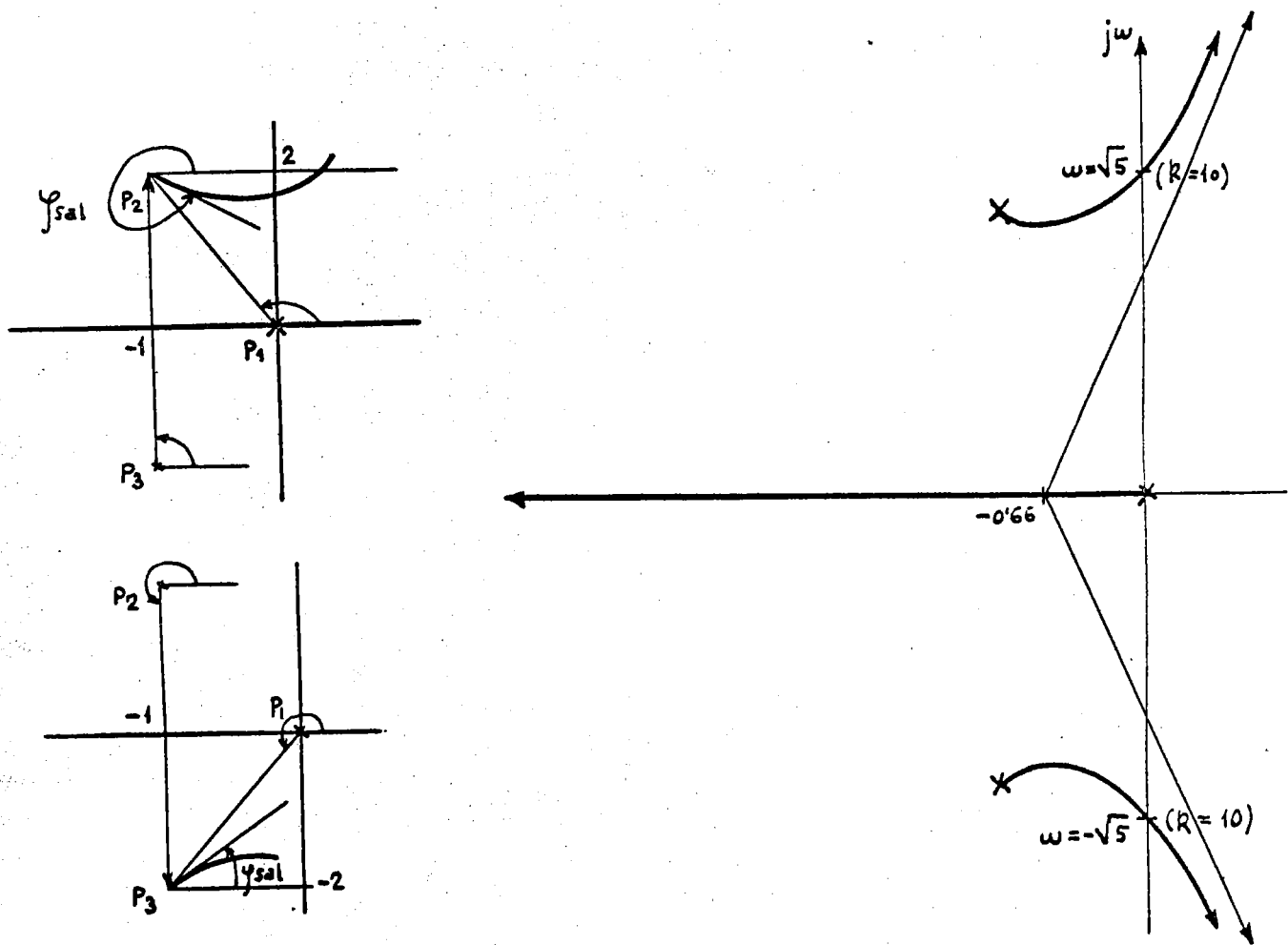


Fig. 18.

De acuerdo con estos resultados, el lugar de Evans de este servosistema tendrá la forma representada. Es estable para  $k < 10$ .

### 6.3.- Servosistema pulsado de segundo orden.

Sea la F.T.B.A.:

$$k G(z) = k \frac{z + 2}{z \cdot (z - 1)} \quad (6.3.1.)$$

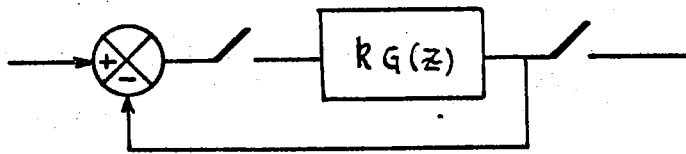


Fig.

La ecuación característica será:

$$z(z - 1) + k(z + 2) = 0 \quad (6.3.2.)$$

Regla 2.- Número de ramas:  $n = 2$ .

Regla 3.- Puntos de partida:  $p_1 = 0$ ,  $p_2 = 1$

Regla 4.- Puntos de llegada:  $z_1 = -2$ .

$$n - m = 2 - 1 = 1 \quad \text{dirección asintótica}$$

Regla 5.- Asíntota:

$$(\sigma, \Delta) = \frac{\pi + 2\lambda\pi}{m - n} = \frac{\pi + 2\lambda\pi}{-1} = -\pi$$

Regla 6.- Ramas sobre el eje real:

Intervalos  $[0, 1]$  y  $[-2, -\infty]$

Regla 7.- Puntos de separación del eje real. Se obtendrán de:

$$\frac{1}{\alpha + 2} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha - 1}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, se obtienen las raíces:

$\alpha_1 \approx + 0,45$ ;  $\alpha_2 \approx -4,45$ . Los correspondientes valores de  $k$  resultan ser:  $k(\alpha_1) \approx 0,12$ ,  $k(\alpha_2) \approx 10$ .

Regla 8.- Intersecciones con el eje imaginario. Haciendo  $z = jy$  en (6.3.2.) resultan:  $\omega = \pm \sqrt{2}$ ,  $k = 1$ .

(Debido a que en los sistemas muestreados la condición de estabilidad es que los polos estén dentro del círculo de radio unidad, estas intersecciones no tienen tanto interés como en los sistemas continuos, cuya condición de esta

bilidad era que los polos estuvieran en el semiplano izquierdo.

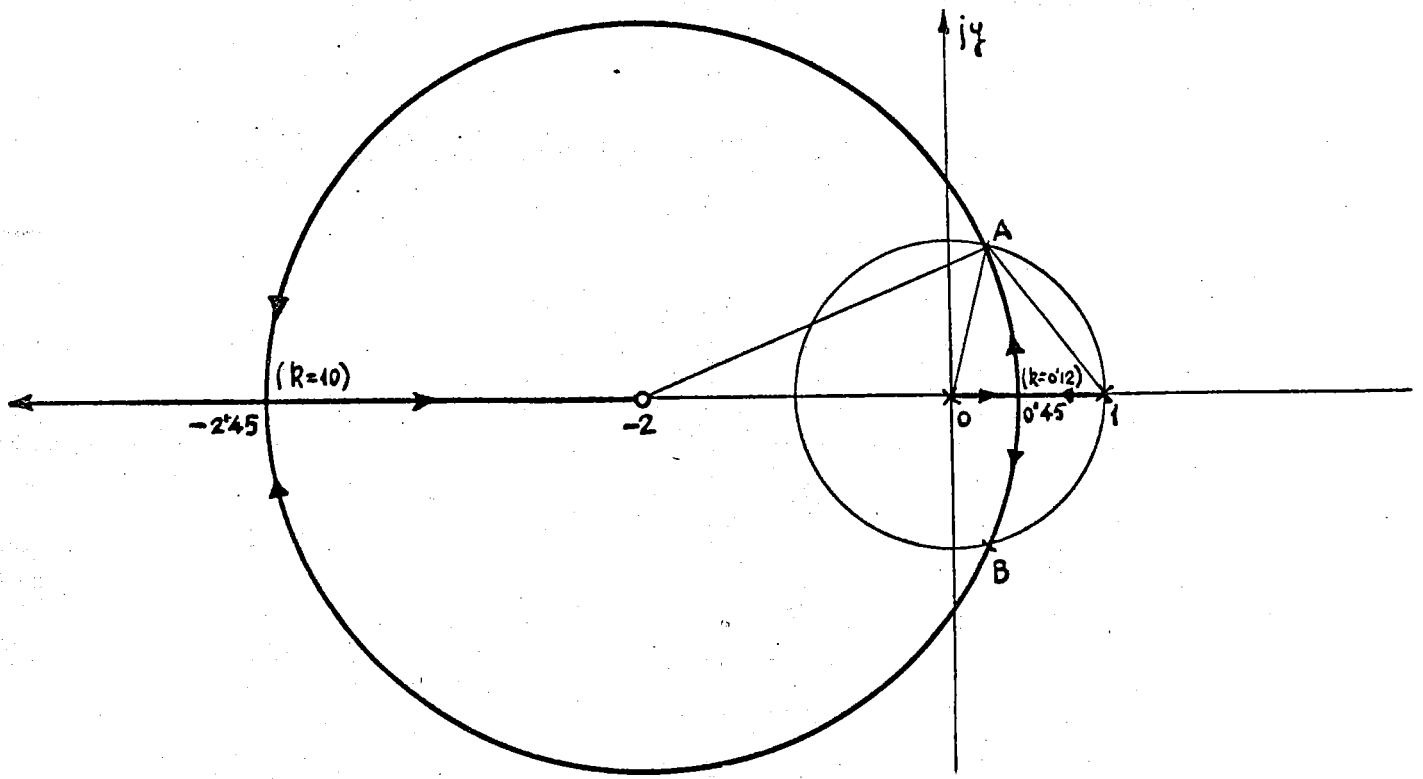


Fig. 19.

La ecuación del lugar para  $0,12 < k < 10$  puede encontrarse sustituyendo  $z = x + jy$ , en la ecuación característica, separando parte real e imaginaria, y eliminando  $k$ . El resultado es:

$$x^2 + y^2 + 4x - 2 = 0,$$

circunferencia de centro  $z = -2$  y radio  $R \approx 2,45$ .

El límite de  $k$  por encima del cual el sistema es inestable será el correspondiente a los puntos A y B, a partir de los cuales los polos de la F.T.B.C. están fuera del círculo de radio unidad.

Puede hallarse algebricamente o geoméricamente.

#### a) Procedimiento algebrico

-Primero se determinan los puntos A y B de intersección de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  con el lugar:  $x^2 + y^2 + 4x - 2 = 0$ ; El resultado es:

$$x \approx 0,25 \quad ; \quad y \approx \pm 0,97$$

Luego despejamos  $k$  en la ecuación característica:

$$k = \frac{-z(z-1)}{z+2} \quad (6.3.3.)$$

y sustituimos  $z = 0,25 + 0,97j$ , ó bien,  $z = 0,25 - 0,97j$ . De esta manera, se obtiene  $k \approx 0,5$ .

Este procedimiento es muy laborioso. Por ello, y dado que en la práctica no se necesita mucha precisión, es preferible emplear un método geométrico.

#### b) Método geométrico.

- Tomando módulos en (6.3.3.), resulta:

$$k = \frac{|\vec{0M}| |\vec{1M}|}{|\vec{-2M}|}$$

Para el punto A,

$$k = \frac{|\vec{0A}| |\vec{1A}|}{|\vec{-2A}|}$$

$$|\vec{0A}| = 1; |\vec{-2A}| = R \approx 2,45$$

Midiendo la distancia ente 1 y A,  $|\vec{1A}| \approx 1,25$ .

$$k = \frac{1 \cdot 1,25}{2,45} \approx 0,51$$

### 7. - Aplicaciones a la estabilidad y la compensación.

#### 7.1.- Estabilidad.

Sabemos que un sistema continuo es estable siempre que todos los polos de su F.T. tengan parte real negativa, es decir, estén situados en el semiplano izquierdo, y que en caso contrario es inestable. Se comprende entonces que la simple inspección del lugar de Evans nos permita sacar conclusiones sobre la estabilidad del sistema y (si está graduado en  $k$  y  $\omega$ ) averiguar los valores críticos de  $k$  y las frecuencias de bombeo correspondientes.

En el cuadro se muestran distintos casos de sistemas continuos y su estabilidad, comparándose las técnicas de Evans y de Nyquist.

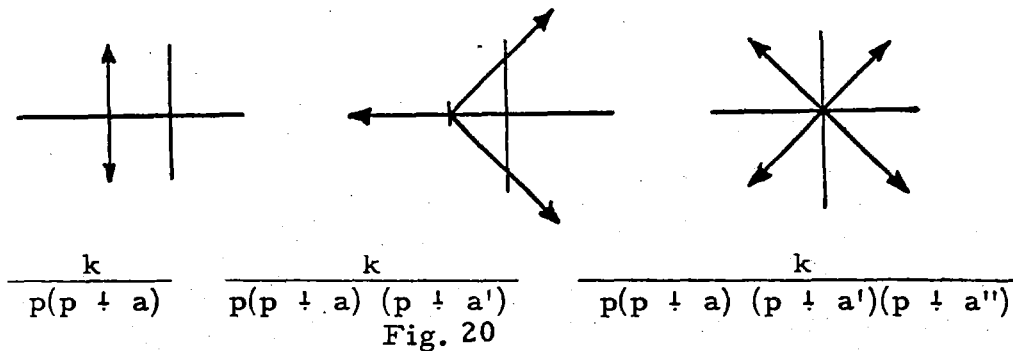
El sistema de segundo orden con bucle unitario y F.T.B.A.

$$k G(p) = \frac{k}{p(p + a)}$$

es, como puede observarse, estable para cualquier valor de  $k$ . Sin embargo, lo frecuente es que al escribir esta F.T.B.A. hayamos despreciado cierto retardos parásitos que, caso de ser considerados, darían lugar a que el orden del sistema fuese mayor, dándose el fenómeno de bombeo, siempre pre-



sente en la realidad. Esto muestra que los retardos parásitos tienden a inestabilizar el sistema. Así, si consideramos un factor adicional  $1/p + a'$ , a causa del polo suplementario  $p = -a'$ , las asíntotas del lugar de Evans, en lugar



de ser verticales, se inclinan a  $\pm \frac{\pi}{3}$ ; si consideramos otro retardo más, se inclinarían a  $\pm \frac{\pi}{4}$ , tendiendo el sistema cada vez más a la inestabilidad.

Generalmente, se establece un margen de seguridad, bien sea absoluto o relativo (Ver Gille, p. 275). El lugar de Evans se presta muy bien para determinar la ganancia máxima  $k$  por encima de la cual los polos dominantes (los más cercanos al eje imaginario) se sitúan fuera del margen de estabilidad.

Por ejemplo, consideremos el servosistema estudiado en (6.1.). Impongamos un margen de seguridad relativo de  $\Psi > 30^\circ$  (esto equivale a decir que el factor de amortiguamiento de los polos dominantes,  $\zeta = \sin \Psi$ , deberá ser superior a 0,5). Si trazamos rectas a partir del origen que formen ángulos de  $30^\circ$  con el eje imaginario, su intersección con el lugar de Evans nos determinará los polos dominantes. El valor límite de  $k$  puede obtenerse bien algebricamente (se halla el punto intersección de la recta y el lugar de Evans, y se sustituye en el valor de  $k$  despejado de la ecuación característica), o, lo que es más cómodo, geoméricamente: se miden  $|\vec{0p_1}| = 0,7$ ;  $|\vec{-1, p_1}| = 0,9$ ;  $|\vec{-2, p_1}| = 1,8$ , y se sustituyen en

$$|k| = \frac{|\vec{0p_1}| \cdot |\vec{-1, p_1}| \cdot |\vec{-2, p_2}|}{2}$$

obtenido de la ecuación característica (6.1.3.). Resulta así  $k \approx 0,57$ .

De manera análoga se puede tratar la estabilidad de los sistemas muestreados.

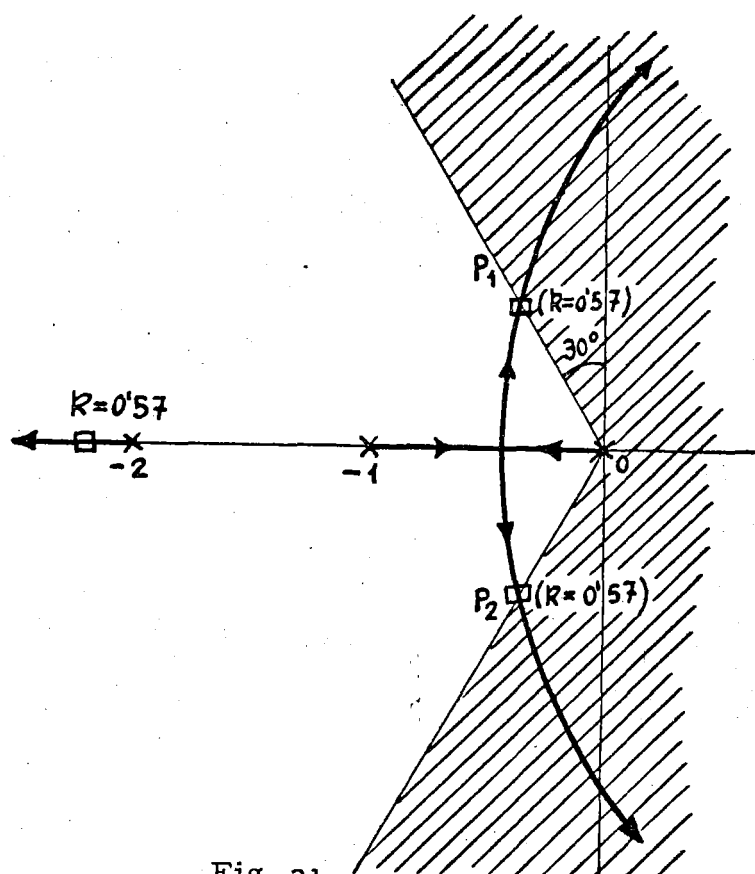


Fig. 21

## 7.2.- Compensación por control derivado o avance de fase.

La compensación por control derivado consiste en contrarrestar el efecto inestabilizador de los retardos parásitos añadiendo a  $G(p)$  ó  $H(p)$  uno o varios ceros suplementarios reales y negativos, es decir, introduciendo factores derivados de la forma

$$p + a \quad (a > 0)$$

En efecto, de esta manera se aumenta el ángulo que las asíntotas forman con el eje real. Así, si  $n - m = 4$ , las asíntotas tienen una inclinación de  $\pm \frac{\pi}{4}$ ; si introducimos un factor derivado,  $n - m = 3$ , y las asíntotas se inclinan a  $\pm \frac{\pi}{3}$ ; con otro factor más conseguiríamos asíntotas verticales. Como consecuencia, el bombeo tiene lugar para valores de  $k$  y  $\omega$  mayores, o incluso, desaparece.

Realmente, junto con el factor derivado se introduce siempre un retardo parásito, y, en lugar de multiplicar por  $p + a$ , se multiplica por  $p + a/p + b$  ( $b > a > 0$ ), no modificándose las direcciones asintóticas, pero sí su corte en el eje real,  $\beta$ . La compensación se llama entonces por avance de fase.

Si la constante de tiempo parásita  $1/b$  es pequeña, la compensación

por avance de fase tiene el mismo efecto de retardar el bombeo que el factor derivado.

Como ejemplo, hemos representado el lugar de Evans del servosistema tratado en (6.1.), compensado por

$$\frac{p + 0,5}{p + 10}$$

Compárese con el lugar de Evans antes de compensar.

(Un ejemplo, muy parecido a este, estudiado por los métodos clásicos de lugares de transferencia, puede verse en Gille, pág. 442).

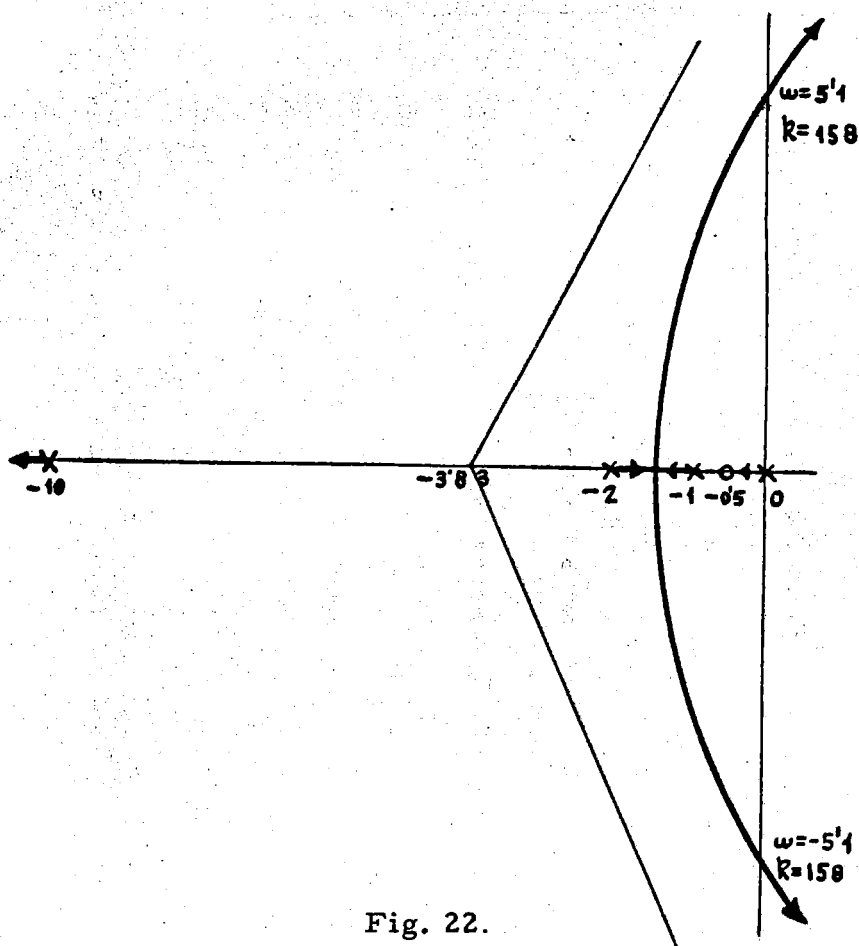
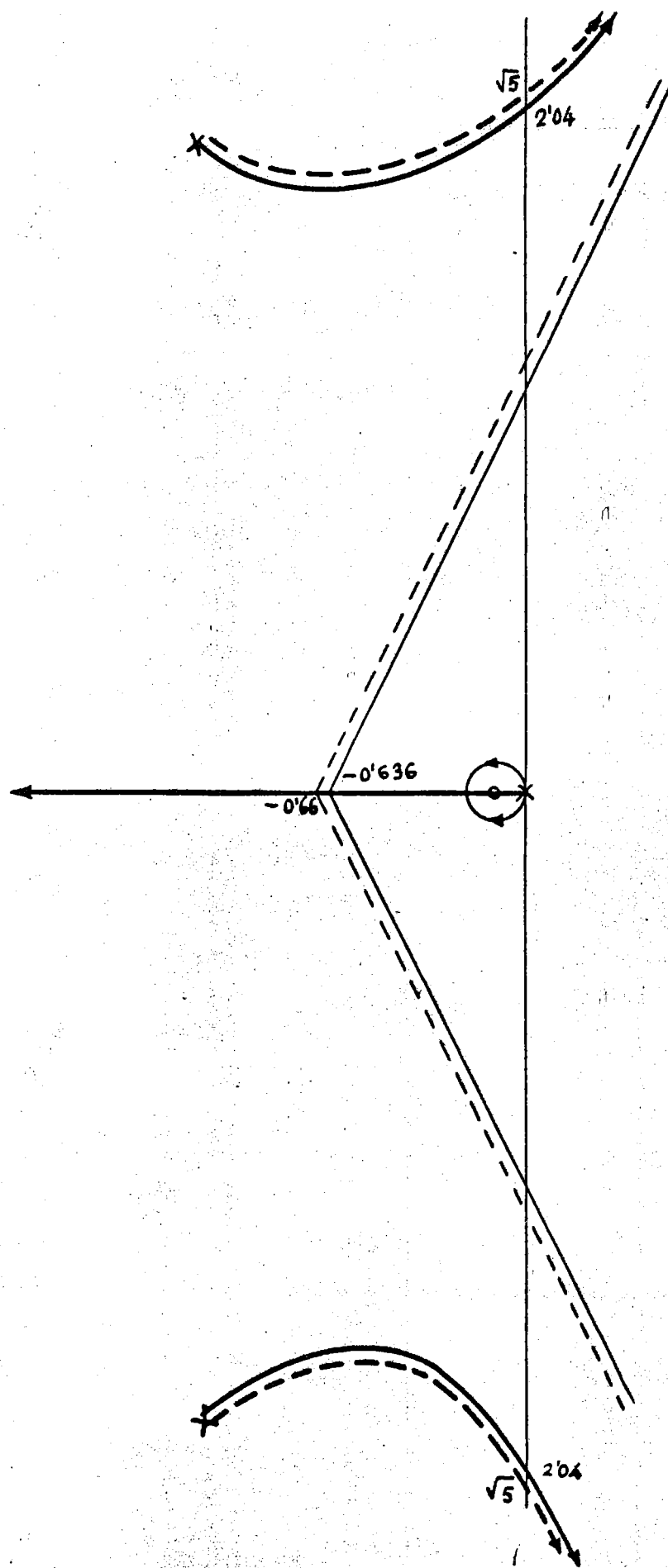


Fig. 22.

### 7.3.- Compensación por control integral (Gille, p. 443).

La compensación por control integral en sentido estricto consiste en introducir un polo suplementario en el origen (una integración),  $p = 0$ , para suprimir el error de posición (o dos integraciones para suprimir el error de arrastre).

En la práctica se utiliza el control integral subcompensado, que consiste en introducir un factor



$$\frac{p + a}{p + b} \quad a > b > 0$$

es decir un cero y un polo reales y negativos situados muy cerca del origen en relación a los otros modos del sistema.

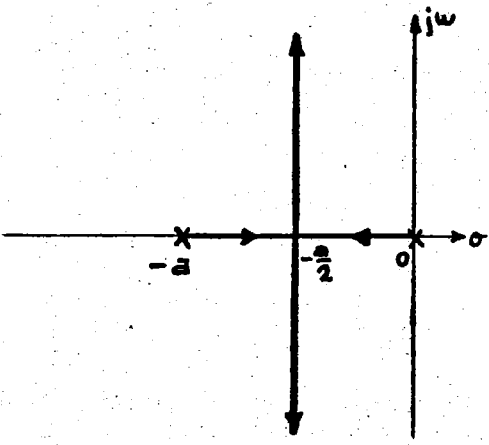
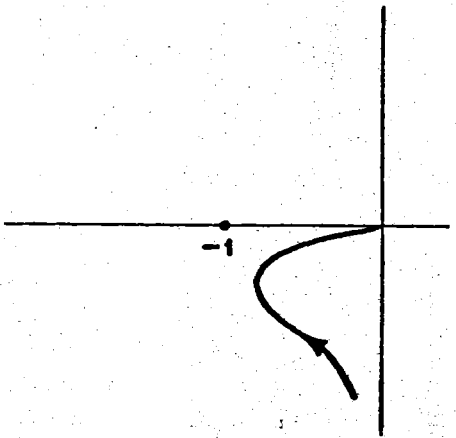
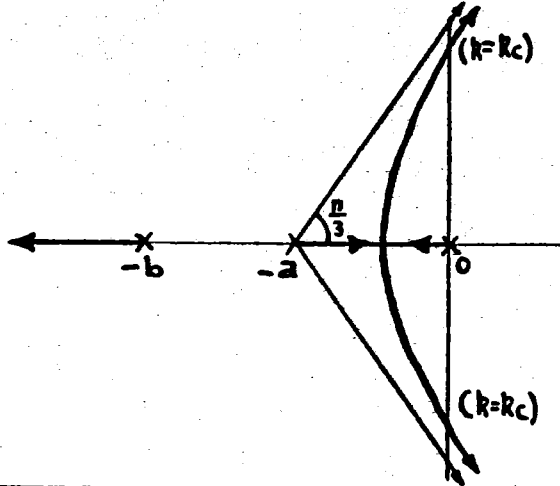
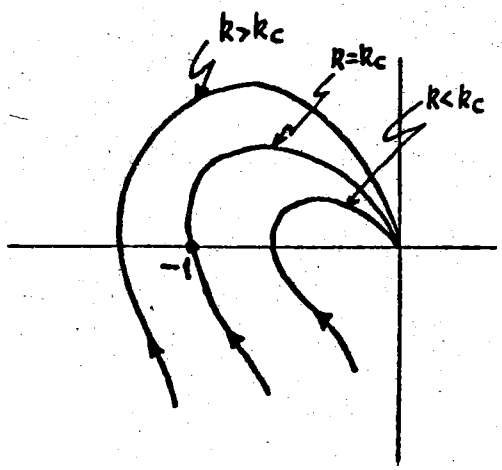
En la figura se muestra el efecto de añadir al sistema tratado en (6.2.) un factor

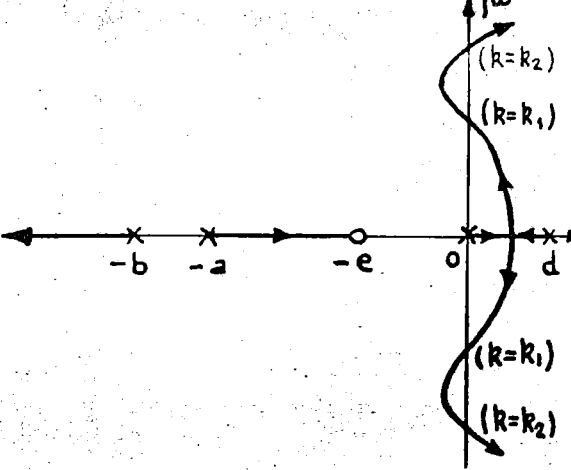
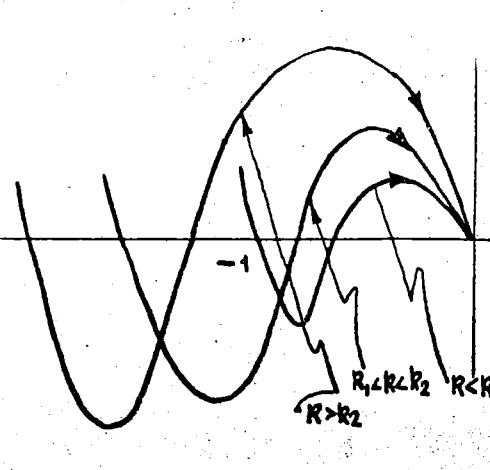
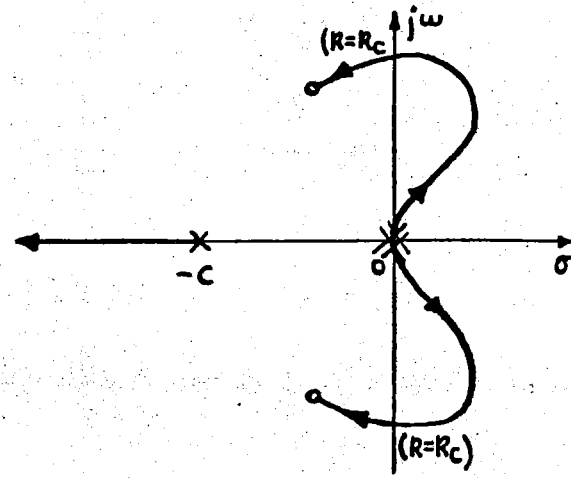
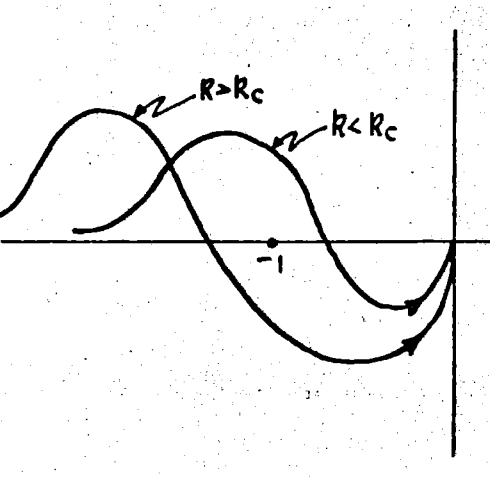
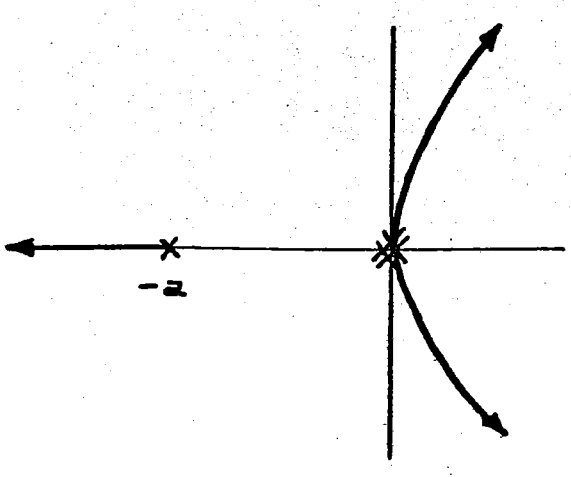
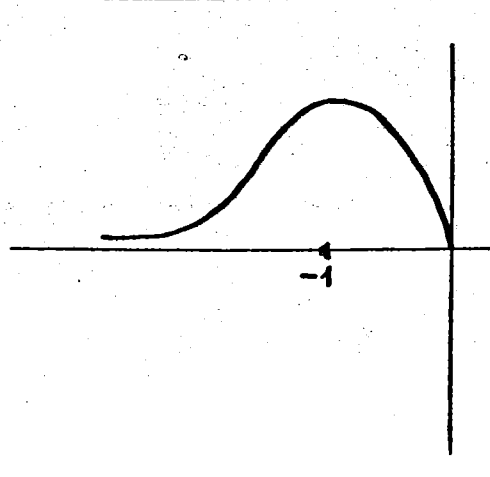
$$\frac{p + 0,1}{p + 0,01}$$

Como se puede observar, el efecto sobre el lugar de Evans es muy pequeño. Sin embargo, ahora la  $k$  no significa lo mismo: gracias a la introducción del cero  $p = -0,1$  y del polo  $p = -0,01$  un mismo valor de  $k$  corresponde a una ganancia en bucle abierto  $k$  que es la primitiva multiplicada por  $0,1/0,01 = 10$ . Por ello, en primera aproximación, la constante de arrastre se ha multiplicado por 10.

Fig. 23

Cuadro comparativo sobre la Estabilidad de algunos servosistemas continuos.

$kG(p) H(p)$	Lugar de Evans	Lugar de Nyquist	Estabilidad
$\frac{k}{p(p + a)}$			Estable para cualquier valor de $k$ .
$\frac{k}{p(p + a)(p + b)}$			Estable para $k < k_c$ (Sistema Regular).

$\frac{k(p+e)}{p(p+a)(p+b)(p+c)(p-d)}$ <p><math>(b &gt; a &gt; e &gt; 0)</math></p>			<p>abierto, por tener - un polo, <math>p=d</math>, en el semiplano derecho.</p> <p>Estable en lazo - cerrado para <math>k_1 &lt; k &lt; k_2</math>. (Sistema A - Estabilidad Condicio- nal.</p>
$k \frac{p^2 + ap + b}{p^2(p+c)}$			<p>Estable para</p> <p><math>k &gt; k_c</math></p> <p>(Sistema Paradójico)</p>
$\frac{k}{p^2(p+a)}$			<p>Inestable para cual- quier valor de <math>k</math>.</p>

## 8. - Observaciones finales.

### 8.1.. $k < 0$

En el desarrollo de la teoría del lugar de las raíces se ha considerado que  $k$  es siempre mayor que cero. Aunque no es un caso nada corriente, no presentaría dificultad el estudiar lo que ocurre cuando  $k < 0$ .

Entonces las reglas (4.2.) y (4.3.) se convierten en las siguientes:

$$| G(p) \cdot H(p) | = \frac{1}{|k|} \quad (8.1.)$$

$$\arg [G(p) \cdot H(p)] = 2\lambda\pi \quad (8.2.)$$

Vemos que sólo cambia la condición de fase, lo cual nos indica que, de las reglas enunciadas en el apartado 5., se verán afectadas únicamente aquellas que se han deducido a partir de dicha condición. Dejamos al cuidado del lector el enunciar dichas reglas.

### 8.2.- Lugar de raíces respecto de otros parámetros.

La ecuación característica (2.2.) del sistema es lineal respecto de  $k$  y es justamente esto lo que ha permitido parametrizar fácilmente el lugar y extraer de él consecuencias importantes, referentes sobre todo a la estabilidad, márgenes de funcionamiento satisfactorio, etc.... o dicho en otros términos, referentes a la sensibilidad del sistema en lo que concierne a  $k$ .

Es interesante siempre conocer la sensibilidad del sistema en relación con otros parámetros, para prever sorpresas desagradables en el funcionamiento, debido a variaciones inesperadas de los mismos. Imagínese el caso sencillo de una célula de adelanto de fase, constituida de elementos con una cierta tolerancia y posibles y mal conocidas variaciones debidas a muchas causas. Existen formas matemáticas de realizar un estudio de la sensibilidad, pero una muy cómoda en los sistemas de control puede ser el lugar de raíces, en los casos en que la ecuación característica depende linealmente del parámetro en estudio.

Así, por ejemplo, si tenemos, un sistema cuya F.T.B.A. es

$$\frac{G(p + b)}{p(p + \alpha)(p + a)}$$

y suponemos determinado por medio del lugar de raíces un valor de  $G = G_0$

tal que su funcionamiento sea conveniente, podríamos preguntarnos qué ocurriría al variar el parámetro  $\alpha$ .

Tenemos que

$$F.T.B.C. = \frac{G_o (p + b)}{p(p + \alpha)(p + a) + G_o(p + b)} \quad (8.3.)$$

$G_o$ ,  $\alpha$ ,  $a$  y  $b$  son conocidos y por tanto lo son las raíces. Ahora - si  $\alpha$  varía, digamos  $\Delta\alpha$ , las raíces describirán una trayectoria (parametrizable en  $\Delta\alpha$ ) que puede llevar el sistema a comportarse de forma no conveniente.

El estudio y aplicación del lugar de raíces se llevaría a cabo sobre la nueva ecuación característica, (llamando  $\alpha = \alpha_o + \Delta\alpha$ ):

$$\underbrace{p(p + \alpha_o)(p + a) + G_o(p + b)}_{A(p)} + \Delta\alpha \cdot p(p + a) = 0$$

$$\text{ó} \quad A(p) + \Delta\alpha \cdot B(p) = 0 \quad (8.4.)$$

donde (8.4.) es lo mismo que (2.4.) aunque con un significado diferente. En este caso  $A(p)$ , que da los puntos de partida, no es otra cosa que el conjunto de raíces del sistema tal como lo habíamos deseado.  $B(p)$  es un polinomio - que no tiene nada que ver con los ceros del sistema.



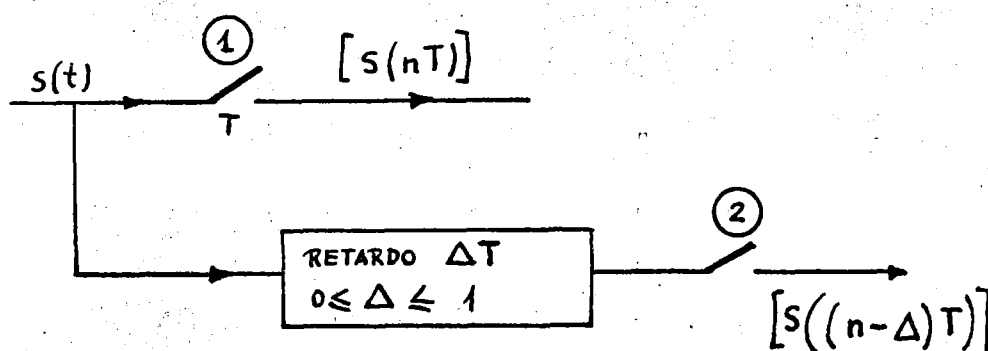
### A N E X O III

#### Definición de la transformada en $(z, m)$ .

Hemos visto cómo, cuando se muestrea una señal, se pierde la información de la misma entre los instantes de muestreo. La transformada en  $z$  está definida para la señal en los instantes de muestreo.

La transformada en  $(z, m)$  es un artificio matemático que permite recobrar los valores de la señal en cualquier momento entre dos instantes de muestreo.

Damos solamente la definición.



Si suponemos un retardo  $\Delta T$ , se tiene después de 0 :

$$\mathcal{Z}[s((n - \Delta)T)] = \sum_{n=0}^{\infty} s((n - \Delta)T) \cdot z^{-n} = S(z, \Delta)$$

Se ve que  $S(z, \Delta)$  permite recobrar  $s(t)$  haciendo variar  $\Delta$  entre 0 y 1. Es costumbre escribir:

$$\Delta = 1 - m$$

donde  $m$  tiene la ventaja de variar en el mismo sentido que el tiempo. Variando  $m$  entre 0 y 1 se obtiene el valor de la señal entre los instantes  $(n - 1)T$  y  $nT$ .

Se tiene entonces la transformada en  $z$  modificada que es una función de dos variables: una compleja  $z$ , otra real  $m$  comprendida entre 0 y 1. Puede definirse directamente por la fórmula.

$$\mathcal{Z}_m(s(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} s((n - 1 + m)T) \cdot z^{-n}$$

Se calculan, también las correspondencias entre transformada en  $(z, m)$  y las transformadas en  $z$  y en  $p$ , pero ya puede verse por las tablas

que son muy complicadas. La transformada en  $(z, m)$ , aunque se describe en todos los libros de sistemas muestreados, se utiliza rara vez.

-----

- A N E X O 4. -

TABLAS DE TRANSFORMADAS EN Z Y EN (Z, m)

No.	$G(s)$	$g(t)$	$G(z)$	$G(z, m)$
0.01	$e^{-sT}$	$\delta(t - kT)$	$z^{-k}$	$z^{m-k-1}$
0.02	1	$\delta(t)$	1 or $z^{-0}$	0
1.01	$\frac{1}{s}$	$u(t)$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{z-1}$
1.02	$\frac{1}{s^2}$	$t$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{mT}{z-1} + \frac{T}{(z-1)^2}$
1.03	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2!} t^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$	$\frac{T^2}{2} \left[ \frac{m^2}{z-1} + \frac{2m+1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} \right]$
1.04	$\frac{1}{s^4}$	$\frac{1}{3!} t^3$	$\frac{T^3 z(z^2+4z+1)}{6(z-1)^4}$	$\frac{T^3}{6} \left[ \frac{m^3}{z-1} + \frac{3m^2+3m+1}{(z-1)^2} + \frac{6m+6}{(z-1)^3} + \frac{6}{(z-1)^4} \right]$
1.05	$\frac{1}{s^{k+1}}$	$\frac{1}{k!} t^k$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left( \frac{z}{z - e^{-aT}} \right)$	$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left( \frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}} \right)$
2.01	$\frac{1}{s - (1/T) \ln a}$	$a^{t/T}$	$\frac{z}{z-a}$	$\frac{a^m}{z-a}$
2.02	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$	$\frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}}$
2.03	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$t e^{-at}$	$\frac{Tz e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$	$\frac{T e^{-amT} [e^{-aT} + m(z - e^{-aT})]}{(z - e^{-aT})^2}$
2.04	$\frac{1}{(s+a)^3}$	$\frac{t^2}{2} e^{-at}$	$\frac{T^2 e^{-aT} z}{2(z - e^{-aT})^3} + \frac{T^2 e^{-2aT} z}{(z - e^{-aT})^2}$	$\frac{T^2 e^{-amT}}{2} \left[ \frac{m^2}{z - e^{-aT}} + \frac{(2m+1)e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2} + \frac{2e^{-2aT}}{(z - e^{-aT})^3} \right]$
2.05	$\frac{1}{(s+a)^{k+1}}$	$\frac{t^k}{k!} e^{-at}$	$\frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left( \frac{z}{z - e^{-aT}} \right)$	$\frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left( \frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}} \right)$
3.01	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1 - e^{-at}$	$\frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$	$\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-amT}}{z - e^{-aT}}$
3.02	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$t - \frac{1 - e^{-at}}{a}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1 - e^{-aT})z}{a(z-1)(z - e^{-aT})}$	$\frac{T}{(z-1)^2} + \frac{mT - 1/a}{z-1} + \frac{e^{-amT}}{a(z - e^{-aT})}$

No.	$G(s)$	$g(t)$	$G(z)$	$G(z, m)$
3.03	$\frac{a}{s^2(s+a)}$	$\frac{1}{2!} \left( a^2 - \frac{2}{a}t + \frac{2}{a^3} - \frac{2}{a^3}e^{-at} \right)$	$\frac{T^2 z}{(z-1)^3} + \frac{(aT-2)Tz}{2a(z-1)^3} + \frac{z}{a^2(z-1)} - \frac{z}{a^2(z-e^{-aT})}$	$\frac{T^2}{(z-1)^3} + \frac{T^2(m+1/2) - T/a}{(z-1)^3} + \frac{T^2 m^2/2 - Tm/a + 1/a^2}{z-1} - \frac{e^{-amT}}{a^2(z-e^{-aT})}$
3.04	$\frac{a}{s^{k+1}(s+a)}$	$\frac{1}{k!} \left[ t^k - \frac{k}{a}t^{k-1} + \frac{k(k-1)}{a^2}t^{k-2} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{k!}{a^k}t + (-1)^k \frac{k!}{a^k} \right] + (-1)^{k+1} \frac{e^{-at}}{a^k}$	$\frac{(-1)^{k+1}}{a^k} \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} + \frac{a}{k!} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left[ \frac{1}{(x+a)(1-e^{Tx}z^{-1})} \right]$	$\frac{(-1)^{k+1}}{a^k} \frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}} + \frac{a}{k!} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left[ \frac{e^{mx}}{(x+a)(z-e^{Tx})} \right]$
4.01	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\sin \omega_0 t$	$\frac{z \sin \omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	$\frac{z \sin m\omega_0 T + \sin(1-m)\omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$
4.02	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\cos \omega_0 t$	$\frac{z(z - \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	$\frac{z \cos m\omega_0 T - \cos(1-m)\omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$
4.03	$\frac{\omega_0}{s^2 - \omega_0^2}$	$\sinh \omega_0 t$	$\frac{z \sinh \omega_0 T}{z^2 - 2z \cosh \omega_0 T + 1}$	$\frac{z \sinh m\omega_0 T + \sinh(1-m)\omega_0 T}{z^2 - 2z \cosh \omega_0 T + 1}$
4.04	$\frac{s}{s^2 - \omega_0^2}$	$\cosh \omega_0 t$	$\frac{z(z - \cosh \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cosh \omega_0 T + 1}$	$\frac{z \cosh m\omega_0 T - \cosh(1-m)\omega_0 T}{z^2 - 2z \cosh \omega_0 T + 1}$
4.05	$\frac{\omega_0^2}{s(s^2 - \omega_0^2)}$	$\cosh \omega_0 t - 1$	$\frac{z(z - \cosh \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cosh \omega_0 T + 1} - \frac{z}{z-1}$	$\frac{z \cosh m\omega_0 T - \cosh(1-m)\omega_0 T}{z^2 - 2z \cosh \omega_0 T + 1} - \frac{1}{z-1}$
4.06	$\frac{\omega_0^2}{s(s^2 + \omega_0^2)}$	$1 - \cos \omega_0 t$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z(z - \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	$\frac{1}{z-1} - \frac{z \cos m\omega_0 T - \cos(1-m)\omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$
4.07	$\frac{\omega_0^2(s+a)}{s(s^2 + \omega_0^2)}$	$a - a \sec \theta \cos(\omega_0 t + \theta)$ where $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega_0}{a}$	$\frac{az}{z-1} - \frac{az^2 - az \sec \theta \cos(\omega_0 T + \theta)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	$\frac{a}{z-1} - \frac{a \sec \theta [z \cos(m\omega_0 T + \theta) - \cos\{(1-m)\omega_0 T + \theta\}]}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$
5.01	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{z}{z-e^{-bT}}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}} - \frac{e^{-bmT}}{z-e^{-bT}}$
5.02	$\frac{(h-a)(s+c)}{(s+a)(s+b)}$	$(c-a)e^{-at} + (b-c)e^{-bt}$	$\frac{(c-a)z}{z-e^{-aT}} + \frac{(b-c)z}{z-e^{-bT}}$	$\frac{(c-a)e^{-amT}}{z-e^{-aT}} + \frac{(b-c)e^{-bmT}}{z-e^{-bT}}$
5.03	$\frac{ah}{s(s+a)(s+b)}$	$1 + \frac{b}{a-b}e^{-at} - \frac{a}{a-b}e^{-bt}$	$\frac{z}{z-1} + \frac{bz}{(a-b)(z-e^{-aT})} - \frac{az}{(a-b)(z-e^{-bT})}$	$\frac{1}{z-1} + \frac{be^{-amT}}{(a-b)(z-e^{-aT})} - \frac{ae^{-bmT}}{(a-b)(z-e^{-bT})}$

5.04	$\frac{nb(a+c)}{s(s+a)(s+b)}$	$c + \frac{b(c-a)}{a-b}e^{-at} + \frac{a(b-c)}{a-b}e^{-bt}$	$\frac{cz}{z-1} + \frac{b(c-a)z}{(a-b)(z-e^{-aT})} + \frac{a(b-c)z}{(a-b)(z-e^{-bT})}$	$\frac{c}{z-1} + \frac{b(c-a)e^{-amT}}{(a-b)(z-e^{-aT})} + \frac{a(b-c)e^{-bmT}}{(a-b)(z-e^{-bT})}$
5.05	$\frac{a^2b^2}{s^2(s+a)(s+b)}$	$ab^2 - (a+b) - \frac{b^2}{a-b}e^{-at} + \frac{a^2}{a-b}e^{-bt}$	$\frac{ab^2Tz}{(z-1)^2} - \frac{(a+b)z}{z-1} - \frac{b^2z}{(a-b)(z-e^{-aT})} + \frac{a^2z}{(a-b)(z-e^{-bT})}$	$\frac{ab^2T}{(z-1)^2} + \frac{abmT - (a+b)}{z-1} - \frac{b^2e^{-amT}}{(a-b)(z-e^{-aT})} + \frac{a^2e^{-bmT}}{(a-b)(z-e^{-bT})}$
5.06	$\frac{a^2b^2(s+c)}{s^2(s+a)(s+b)}$	$nbc + [ab - c(a+b)] - \frac{b^2(c-a)}{a-b}e^{-at} - \frac{a^2(b-c)}{a-b}e^{-bt}$	$\frac{nbcTz}{(z-1)^2} + \frac{ab - c(a+b)z}{z-1} - \frac{b^2(c-a)z}{(a-b)(z-e^{-aT})} - \frac{a^2(b-c)z}{(a-b)(z-e^{-bT})}$	$\frac{nbcT}{(z-1)^2} + \frac{ab(1+cmT) - c(a+b)}{z-1} - \frac{b^2(c-a)e^{-amT}}{(a-b)(z-e^{-aT})} - \frac{a^2(b-c)e^{-bmT}}{(a-b)(z-e^{-bT})}$
6.01	$\frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)}$	$\frac{z}{(b-a)(c-a)(z-e^{-aT})} + \frac{z}{(a-b)(c-b)(z-e^{-bT})} + \frac{z}{(a-c)(b-c)(z-e^{-cT})}$	$\frac{e^{-amT}}{(b-a)(c-a)(z-e^{-aT})} + \frac{e^{-bmT}}{(a-b)(c-b)(z-e^{-bT})} + \frac{e^{-cmT}}{(a-c)(b-c)(z-e^{-cT})}$
6.02	$\frac{s+d}{(s+a)(s+b)(s+c)}$	$\frac{(d-a)}{(b-a)(c-a)}e^{-at} + \frac{(d-b)}{(a-b)(c-b)}e^{-bt} + \frac{(d-c)}{(a-c)(b-c)}e^{-ct}$	$\frac{(d-a)z}{(b-a)(c-a)(z-e^{-aT})} + \frac{(d-b)z}{(a-b)(c-b)(z-e^{-bT})} + \frac{(d-c)z}{(a-c)(b-c)(z-e^{-cT})}$	$\frac{(d-a)e^{-amT}}{(b-a)(c-a)(z-e^{-aT})} + \frac{(d-b)e^{-bmT}}{(a-b)(c-b)(z-e^{-bT})} + \frac{(d-c)e^{-cmT}}{(a-c)(b-c)(z-e^{-cT})}$
6.03	$\frac{abc}{s(s+a)(s+b)(s+c)}$	$1 - \frac{bc}{(b-a)(c-a)}e^{-at} - \frac{ca}{(c-b)(a-b)}e^{-bt} - \frac{ab}{(a-c)(b-c)}e^{-ct}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{bcz}{(b-a)(c-a)(z-e^{-aT})} - \frac{caz}{(c-b)(a-b)(z-e^{-bT})} - \frac{abz}{(a-c)(b-c)(z-e^{-cT})}$	$\frac{1}{z-1} - \frac{bce^{-amT}}{(b-a)(c-a)(z-e^{-aT})} - \frac{cae^{-bmT}}{(c-b)(a-b)(z-e^{-bT})} - \frac{ab e^{-cmT}}{(a-c)(b-c)(z-e^{-cT})}$
6.04	$\frac{abc(s+d)}{s(s+a)(s+b)(s+c)}$	$d - \frac{bc(d-a)}{(b-a)(c-a)}e^{-at} - \frac{ca(d-b)}{(c-b)(a-b)}e^{-bt} - \frac{ab(d-c)}{(a-c)(b-c)}e^{-ct}$	$\frac{dz}{z-1} - \frac{bc(d-a)z}{(b-a)(c-a)(z-e^{-aT})} - \frac{ca(d-b)z}{(c-b)(a-b)(z-e^{-bT})} - \frac{ab(d-c)z}{(a-c)(b-c)(z-e^{-cT})}$	$\frac{d}{z-1} - \frac{bc(d-a)e^{-amT}}{(b-a)(c-a)(z-e^{-aT})} - \frac{ca(d-b)e^{-bmT}}{(c-b)(a-b)(z-e^{-bT})} - \frac{ab(d-c)e^{-cmT}}{(a-c)(b-c)(z-e^{-cT})}$
6.05	$\frac{(abc)^2}{s^2(s+a)(s+b)(s+c)}$	$nbc - (bc+ca+ab) + \frac{b^2c^2}{(b-a)(c-a)}e^{-at} + \frac{c^2a^2}{(c-b)(a-b)}e^{-bt} + \frac{a^2b^2}{(a-c)(b-c)}e^{-ct}$	$\frac{nbcTz}{(z-1)^2} - \frac{(bc+ca+ab)z}{z-1} + \frac{b^2c^2z}{(b-a)(c-a)(z-e^{-aT})} + \frac{c^2a^2z}{(c-b)(a-b)(z-e^{-bT})} + \frac{a^2b^2z}{(a-c)(b-c)(z-e^{-cT})}$	$\frac{nbcT}{(z-1)^2} + \frac{abcmT - (bc+ca+ab)}{z-1} + \frac{b^2c^2e^{-amT}}{(b-a)(c-a)(z-e^{-aT})} + \frac{c^2a^2e^{-bmT}}{(c-b)(a-b)(z-e^{-bT})} + \frac{a^2b^2e^{-cmT}}{(a-c)(b-c)(z-e^{-cT})}$

[illegible]

No.	$G(s)$	$g(t)$	$G(z)$	$G(z, m)$
6.06	$\frac{(abc)^2(s+d)}{s^2(s+a)(s+b)(s+c)}$	$abcdt + [abc - (bc + ca + ab)d] + \frac{b^2c^2(d-a)}{(b-a)(c-a)} e^{-at}$ $+ \frac{c^2a^2(d-b)}{(a-b)(a-b)} e^{-bt} + \frac{a^2b^2(d-c)}{(a-c)(b-c)} e^{-ct}$	$\frac{abcdTz}{(s-1)^2} + \frac{[abc - (bc + ca + ab)d]z}{s-1}$ $+ \frac{b^2c^2(d-a)z}{(b-a)(c-a)(z-e^{-aT})} + \frac{c^2a^2(d-b)z}{(c-b)(a-b)(z-e^{-bT})}$ $+ \frac{a^2b^2(d-c)z}{(a-c)(b-c)(z-e^{-cT})}$	$\frac{abcdT}{(s-1)^2} + \frac{abc(dmT+1) - (bc + ca + ab)d}{s-1}$ $+ \frac{b^2c^2(d-a)e^{-amT}}{(b-a)(c-a)(z-e^{-aT})} + \frac{c^2a^2(d-b)e^{-bmT}}{(c-b)(a-b)(z-e^{-bT})}$ $+ \frac{a^2b^2(d-c)e^{-cmT}}{(a-c)(b-c)(z-e^{-cT})}$
7.01	$\frac{a^2}{s(s+a)^2}$	$1 - (1+at)e^{-at}$	$\frac{z}{s-1} - \frac{z}{s-e^{-aT}} - \frac{aTe^{-aT}z}{(s-e^{-aT})^2}$	$\frac{1}{s-1} - \left[ \frac{1+amT}{s-e^{-aT}} + \frac{aTe^{-aT}}{(s-e^{-aT})^2} \right] e^{-amT}$
7.02	$\frac{a^2(s+b)}{s(s+a)^2}$	$b - be^{-at} + a(a-b)te^{-at}$	$\frac{bz}{s-1} - \frac{bz}{s-e^{-aT}} + \frac{a(a-b)Te^{-aT}z}{(s-e^{-aT})^2}$	$\frac{b}{s-1} + \left[ \frac{amT(a-b) - b}{s-e^{-aT}} + \frac{aT(a-b)e^{-aT}}{(s-e^{-aT})^2} \right] e^{-amT}$
7.03	$\frac{a^2}{s^2(s+a)^2}$	$at - 2 + (at+2)e^{-at}$	$\frac{(aT+2)z - 2z^2}{(s-1)^2} + \frac{2z}{s-e^{-aT}} + \frac{aTe^{-aT}z}{(s-e^{-aT})^2}$	$\frac{aT}{(s-1)^2} + \frac{amT-2}{s-1} - \left[ \frac{amT-2}{s-e^{-aT}} - \frac{aTe^{-aT}}{(s-e^{-aT})^2} \right] e^{-amT}$
7.04	$\frac{(a-b)^2}{(s+b)(s+a)^2}$	$e^{-bt} - e^{-at} + (a-b)te^{-at}$	$\frac{z}{s-e^{-bT}} - \frac{z}{s-e^{-aT}} + \frac{(a-b)Te^{-aT}z}{(s-e^{-aT})^2}$	$\frac{e^{-bmT}}{s-e^{-bT}} + \left[ \frac{mT(a-b) - 1}{s-e^{-aT}} + \frac{(a-b)Te^{-aT}}{(s-e^{-aT})^2} \right] e^{-amT}$
7.05	$\frac{(a-b)^2(s+a)}{(s+b)(s+a)^2}$	$(c-b)e^{-bt} + (b-c)e^{-at} - (a-b)(c-a)te^{-at}$	$\frac{(c-b)z}{s-e^{-bT}} + \frac{(b-c)z}{s-e^{-aT}} - \frac{(a-b)(c-a)Te^{-aT}z}{(s-e^{-aT})^2}$	$\frac{(c-b)e^{-bmT}}{s-e^{-bT}} - \left[ \frac{mT(a-b)(c-a) - (b-c)}{s-e^{-aT}} \right. \\ \left. + \frac{(a-b)(c-a)Te^{-aT}}{(s-e^{-aT})^2} \right] e^{-amT}$
7.06	$\frac{a^2b}{s(s+b)(s+a)^2}$	$1 - \frac{a^2}{(a-b)^2} e^{-bt} + \frac{ab+b(a-b)}{(a-b)^2} e^{-at}$ $+ \frac{ab}{a-b} te^{-at}$	$\frac{z}{s-1} - \frac{a^2z}{(a-b)^2(s-e^{-bT})} + \frac{[ab+b(a-b)]z}{(a-b)^2(s-e^{-aT})}$ $+ \frac{abTe^{-aT}z}{(a-b)(s-e^{-aT})^2}$	$\frac{1}{s-1} - \frac{a^2e^{-bmT}}{(a-b)^2(s-e^{-bT})} + \left[ \frac{b(a-b)(1+amT) + ab}{(a-b)^2(s-e^{-aT})} \right. \\ \left. + \frac{abTe^{-aT}}{(a-b)(s-e^{-aT})^2} \right] e^{-amT}$
7.07	$\frac{a^2b(s+c)}{s(s+b)(s+a)^2}$	$c + \frac{a^2(b-c)}{(a-b)^2} e^{-bt} + \frac{ab(c-a) + bc(a-b)}{(a-b)^2} e^{-at}$ $+ \frac{ab(c-a)}{a-b} te^{-at}$	$\frac{cz}{s-1} + \frac{a^2(b-c)z}{(a-b)^2(s-e^{-bT})} + \frac{[ab(c-a) + bc(a-b)]z}{(a-b)^2(s-e^{-aT})}$ $+ \frac{ab(c-a)Te^{-aT}z}{(a-b)(s-e^{-aT})^2}$	$\frac{c}{s-1} + \frac{a^2(b-c)e^{-bmT}}{(a-b)^2(s-e^{-bT})}$ $+ \left\{ \frac{ab(c-a)[1+mT(a-b)] + bc(a-b)}{(a-b)^2(s-e^{-aT})} \right. \\ \left. + \frac{ab(c-a)Te^{-aT}}{(a-b)(s-e^{-aT})^2} \right\} e^{-amT}$
7.08	$\frac{(a^2b)^2}{s^2(s+b)(s+a)^2}$	$a^2bt - [ab + a(a+b)] + \frac{a^4}{(a-b)^2} e^{-bt}$ $- \frac{ab^2(3a-2b)}{(a-b)^2} e^{-at} - \frac{a^2b^2}{a-b} te^{-at}$	$\frac{a^2bTz}{(s-1)^2} - \frac{[ab + a(a+b)]z}{s-1} + \frac{a^4z}{(a-b)^2(s-e^{-bT})}$ $- \frac{ab^2(3a-2b)z}{(a-b)^2(s-e^{-aT})} - \frac{a^2b^2Te^{-aT}z}{(a-b)(s-e^{-aT})^2}$	$\frac{a^2bT}{(s-1)^2} + \frac{ab(amT-2) - a^4}{s-1} + \frac{a^4e^{-bmT}}{(a-b)^2(s-e^{-bT})}$ $- \left[ \frac{ab^2(a-b)(amT+2) + a^2b^2}{(a-b)^2(s-e^{-aT})} \right. \\ \left. + \frac{a^2b^2Te^{-aT}}{(a-b)(s-e^{-aT})^2} \right] e^{-amT}$

8.01	$\frac{1}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{se^{-at} \sin \omega_0 T}{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}$	$\frac{[e \sin m\omega_0 T + e^{-at} \sin (1-m)\omega_0 T]e^{-amT}}{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}$
8.02	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{s^2 - se^{-at} \cos \omega_0 T}{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}$	$\frac{[e \cos m\omega_0 T - e^{-at} \cos (1-m)\omega_0 T]e^{-amT}}{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}$
8.03	$\frac{(a-b)^2 + \omega_0^2}{(s+b)[(s+a)^2 + \omega_0^2]}$	$e^{-bt} - e^{-at} \sec \theta \cos (\omega_0 t - \theta)$ where $\theta = \tan^{-1} \frac{b-a}{\omega_0}$	$\frac{s}{s-e^{-bT}} - \frac{s^2 - se^{-at} \sec \theta \cos (\omega_0 T - \theta)}{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}$	$\frac{\sec \theta [e \cos (m\omega_0 T + \theta) - e^{-at} \cos [(1-m)\omega_0 T - \theta]]e^{-amT}}{s-e^{-bT} - \frac{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}}$
8.04	$\frac{[(a-b)^2 + \omega_0^2](s+\alpha)}{(s+b)[(s+a)^2 + \omega_0^2]}$	$(\alpha-b)e^{-bt} - (\alpha-b)e^{-at} \sec \theta \cos (\omega_0 t + \theta)$ where $\theta = \tan^{-1} \frac{(\alpha-a)(b-a) + \omega_0^2}{(\alpha-b)\omega_0}$	$\frac{(\alpha-b)s}{s-e^{-bT}} - \frac{(\alpha-b)[s^2 - se^{-at} \sec \theta \cos (\omega_0 T + \theta)]}{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}$	$\frac{(\alpha-b)e^{-bt} - \frac{(\alpha-b) \sec \theta [e \cos (m\omega_0 T + \theta) - e^{-at} \cos [(1-m)\omega_0 T + \theta]]e^{-amT}}{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}}{s-e^{-bT}}$
8.05	$\frac{[(a-b)^2 + \omega_0^2](s^2 + \alpha s + \beta)}{(s+b)[(s+a)^2 + \omega_0^2]}$	$(b^2 - b\alpha + \beta)e^{-bt} + k^2 e^{-at} \sec \theta \cos (\omega_0 t + \theta)$ where $k^2 = a^2 + \omega_0^2 - 2ab + b\alpha - \beta$ $\theta = \tan^{-1} \frac{ak^2 - (a^2 + \omega_0^2)(\alpha-b) + \beta(2a-b)}{\omega_0 k^2}$	$\frac{(b^2 - b\alpha + \beta)s}{s-e^{-bT}} + \frac{k^2[s^2 - se^{-at} \sec \theta \cos (\omega_0 T + \theta)]}{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}$	$\frac{(b^2 - b\alpha + \beta)s}{s-e^{-bT}} + \frac{k^2 \sec \theta [e \cos (m\omega_0 T + \theta) - e^{-at} \cos [(1-m)\omega_0 T + \theta]]e^{-amT}}{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}$
9.01	$\frac{a^2 + \omega_0^2}{s[(s+a)^2 + \omega_0^2]}$	$1 - e^{-at} \sec \theta \cos (\omega_0 t + \theta)$ where $\theta = \tan^{-1} \frac{a}{\omega_0}$	$\frac{s}{s-1} - \frac{s^2 - se^{-at} \sec \theta \cos (\omega_0 T + \theta)}{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}$	$\frac{1}{s-1} - \frac{\sec \theta [e \cos (m\omega_0 T + \theta) - e^{-at} \cos [(1-m)\omega_0 T + \theta]]e^{-amT}}{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}$
9.02	$\frac{(a^2 + \omega_0^2)(s+b)}{s[(s+a)^2 + \omega_0^2]}$	$b - be^{-at} \sec \theta \cos (\omega_0 t + \theta)$ where $\theta = \tan^{-1} \frac{a^2 + \omega_0^2 - ab}{b\omega_0}$	$\frac{bs}{s-1} - \frac{b[s^2 - se^{-at} \sec \theta \cos (\omega_0 T + \theta)]}{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}$	$\frac{b}{s-1} - \frac{b \sec \theta [e \cos (m\omega_0 T + \theta) - e^{-at} \cos [(1-m)\omega_0 T + \theta]]e^{-amT}}{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}$
9.03	$\frac{(a^2 + \omega_0^2)^2}{s^2[(s+a)^2 + \omega_0^2]}$	$(a^2 + \omega_0^2) - 2a + 2ae^{-at} \sec \theta \cos (\omega_0 t + \theta)$ where $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega_0^2 - a^2}{2a\omega_0}$	$\frac{[(a^2 + \omega_0^2)T + 2a]s - 2a^2}{(s-1)^2} + \frac{2a[s^2 - se^{-at} \sec \theta \cos (\omega_0 T + \theta)]}{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}$	$\frac{[mT(a^2 + \omega_0^2) - 2a]s + (a^2 + \omega_0^2)(1-m)T + 2a}{(s-1)^2} + \frac{2a \sec \theta [e \cos (m\omega_0 T + \theta) - e^{-at} \cos [(1-m)\omega_0 T + \theta]]e^{-amT}}{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}$
9.04	$\frac{(a^2 + \omega_0^2)^2(s+b)}{s^2[(s+a)^2 + \omega_0^2]}$	$b(a^2 + \omega_0^2) + k^2 - k^2 e^{-at} \sec \theta \cos (\omega_0 t + \theta)$ where $k^2 = a^2 + \omega_0^2 - 2ab$ $\theta = \tan^{-1} \frac{ak^2 + b(a^2 + \omega_0^2)}{\omega_0 k^2}$	$\frac{[bT(a^2 + \omega_0^2) + k^2]s + k^2}{(s-1)^2} - \frac{k^2[s^2 - se^{-at} \sec \theta \cos (\omega_0 T + \theta)]}{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}$	$\frac{[bmT(a^2 + \omega_0^2) + k^2]s + (a^2 + \omega_0^2)(1-m)bT - k^2}{(s-1)^2} - \frac{k^2 \sec \theta [e \cos (m\omega_0 T + \theta) - e^{-at} \cos [(1-m)\omega_0 T + \theta]]e^{-amT}}{s^2 - 2se^{-at} \cos \omega_0 T + e^{-2at}}$